

۱۴۰۲ نوبت دوم داخل

نام درس	دهم	یازدهم	دوازدهم	ترکیبی	آسان	متوسط	سخت
ریاضیات	۴	۱۵	۹	۱۲	۲	۱۷	۲۱
فیزیک	۸	۱۰	۱۷	-	۲	۲۸	۵
شیمی	۸	۸	۱۱	۳	۵	۱۷	۸

ریاضیات

۱- گزینه ۲

درس نامه اگر a, b و c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، داریم:

$$a + c = 2b$$

سه جمله اول دنباله هندسی را به ترتیب a, ar و ar^2 در نظر می گیریم. اگر این سه جمله را نصف کنیم، به این جملات می رسیم: $\frac{a}{2}, \frac{ar}{2}$ و $\frac{ar^2}{2}$.

به گفته سؤال، جملات بالا، سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند؛ پس طبق درس نامه می توانیم بنویسیم:

$$\frac{a}{2} + \frac{ar^2}{2} = 2 \times \frac{ar}{2} \xrightarrow{\times 2} a + ar^2 = 2ar$$

$$\xrightarrow{-a} 1 + r^2 = 2r \Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 = 0 \Rightarrow r = 1$$

گام ۱ شد، پس قدرنسبت جملات دنباله هندسی ۱ و در نتیجه همه جملات آن با هم برابر می شوند: $a, ar, ar^2, ar^3, \dots \xrightarrow{r=1} a, a, a, a, \dots$ جملات دنباله هندسی

طبق گفته سؤال اگر این جملات را نصف کنیم، دنباله ای حسابی با قدرنسبت d خواهیم داشت: $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \dots$

واضح است که قدرنسبت دنباله حسابی بالا صفر است، پس $d = 0$ می شود؛ بنابراین $r + d = 1 + 0 = 1$.

۲- گزینه ۳

شفاف سازی اگر این سهمی، محور x ها را در نقاطی با طول های α و β قطع کند، یعنی α و β ریشه های سهمی هستند.

درس نامه ۱ اگر مطابق شکل مقابل، دو نقطه با عرض یکسان روی یک سهمی داشته باشیم، طول رأس سهمی (x_S) برابر میانگین طول آن دو نقطه می شود؛ یعنی:

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

۲ اگر مختصات رأس یک سهمی $S(\alpha, \beta)$ باشد، معادله این سهمی به صورت زیر می شود:

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

۳ اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $Ax^2 + Bx + C = 0$ با شرط $\Delta > 0$ باشند، داریم:

$$P = \alpha\beta = \frac{C}{A} \quad \text{ضرب ریشه ها}$$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{B}{A} \quad \text{جمع ریشه ها}$$

۴ سهمی به معادله $y = Ax^2 + Bx + C$ ، محور y ها را در نقطه ای با عرض C قطع می کند.

گام ۱ دو نقطه $A(3, y)$ و $B(-5, y)$ که عرض یکسانی هم دارند، روی این سهمی قرار دارند؛ پس طبق مورد (۱) درس نامه، طول رأس این سهمی می شود $x_S = \frac{-5+3}{2} = -1$.

گام ۲ عرض رأس این سهمی برابر ۱ است، پس مختصات رأس سهمی $S(-1, 1)$ می شود. حالا به کمک مورد (۲) درس نامه، معادله سهمی را به صورت زیر می نویسیم:

$$y = a(x + 1)^2 + 1 = a(x^2 + 2x + 1) + 1 = ax^2 + 2ax + a + 1$$

$$\Rightarrow y = \underbrace{a}_A x^2 + \underbrace{2a}_B x + \underbrace{a+1}_C \quad (*)$$

گام ۱ مجموع و حاصل ضرب ریشه های این سهمی را به کمک مورد (۳) درس نامه به دست می آوریم:

$$S = -\frac{B}{A} = -\frac{2a}{a} = -2$$

$$P = \frac{C}{A} = \frac{a+1}{a}$$

گام ۲ حالا با توجه به این که $\alpha^2 + \beta^2 = 5$ ، داریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 5 \Rightarrow S^2 - 2P = 5 \Rightarrow (-2)^2 - 2\left(\frac{a+1}{a}\right) = 5$$

$$\Rightarrow -2\left(\frac{a+1}{a}\right) = 1 \Rightarrow \frac{a+1}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2a+2 = -a \Rightarrow 3a = -2 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

گام ۳ با جای گذاری $a = -\frac{2}{3}$ در تساوی (*)، معادله سهمی را می نویسیم:

$$y = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$$

حالا که معادله سهمی را به صورت $y = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$ داریم، می توانیم بگوییم این سهمی در نقطه ای به عرض $\frac{1}{3}$ ، محور y ها را قطع می کند (طبق مورد (۴) درس نامه).

۳- گزینه ۲

استراتژی قبل از هر چیز از تساوی $A \times B = B \times A$ ، نتیجه می گیریم که $A = B$ است. حالا سعی می کنیم تساوی $A = B$ را برقرار کنیم. اول تکلیف عضو ۶ از مجموعه A را مشخص می کنیم تا مقدار d به دست آید. با جای گذاری d در تساوی $A = B$ به رابطه $\{a-2, 6, 2b+1, c\} = \{6, 5, -1\}$ می رسیم. در این رابطه یک مجموعه ۳ عضوی با یک مجموعه ۴ عضوی برابر شده است، پس سعی می کنیم در مجموعه سمت راست یک عضو تکراری بسازیم تا هر دو مجموعه ۴ عضوی بشوند؛ این جوری به ۳ تساوی مجموعه ای می رسیم. کلید حل مسئله از این جا به بعد استفاده از مورد (۳) درس نامه است.

درس نامه ۱ اگر $A \times B = B \times A$ باشد، در این صورت یا حداقل یکی از A و B تهی است یا A و B برابرند: $A \times B = B \times A \Rightarrow (A = \emptyset \text{ یا } B = \emptyset \text{ یا } A = B)$

۲ دو مجموعه وقتی برابرند که تک تک اعضایشان مساوی هم باشند.

۳ در هر تساوی مجموعه ای، اگر تعداد اعضای دو مجموعه برابر باشند، می توانیم مجموع اعضای دو مجموعه را مساوی هم بگذاریم.

گام ۱ به گفته سؤال $A \times B = B \times A$ است، پس طبق مورد (۱) درس نامه یا باید حداقل یکی از A و B تهی باشند یا $A = B$ باشد. واضح است که $\{a-2, 6, 2b+1, c\} = A$ و $B = \{\sqrt{d}, 5, -1\}$ هیچ کدام نمی توانند تهی باشند؛ بنابراین $A = B$ است:

$$\{a-2, 6, 2b+1, c\} = \{\sqrt{d}, 5, -1\} \quad (*)$$

گام ۲ طبق مورد (۲) درس نامه، برای برقراری رابطه (*) باید تک تک اعضای دو مجموعه مساوی باشند. از عدد ۶ در مجموعه سمت چپ شروع می کنیم. ۶ که نمی تواند با ۵ و -1 برابر باشد، پس مجبور است مساوی $\sqrt{d}$ باشد:

$$6 = \sqrt{d} \Rightarrow d = 36$$

گام ۳ تا این جا رابطه (*) به این صورت درمی آید: $\{a-2, 6, 2b+1, c\} = \{6, 5, -1\}$ (**). یک مجموعه ۴ عضوی با یک مجموعه ۳ عضوی برابر شده است، پس باید در مجموعه ۳ عضوی (مجموعه سمت راست) یک عضو تکراری بسازیم تا هر دو مجموعه ۴ عضوی بشوند. این عضو تکراری می تواند -1 یا ۵ یا ۶ باشد؛ این سه حالت را جداگانه بررسی می کنیم:

♦ «۶» عضو تکراری باشد، در این حالت داریم: $\{a-2, 6, 2b+1, c\} = \{6, 6, 5, -1\}$ (۱)

در تساوی مجموعه ای بالا تعداد اعضای دو مجموعه برابرند، پس طبق مورد (۳) درس نامه می توانیم مجموع اعضای دو مجموعه را مساوی هم بگذاریم:

$$(a-2) + 6 + (2b+1) + c = 6 + 6 + 5 - 1$$

$$\Rightarrow a + 2b + c + 5 = 16 \Rightarrow a + 2b + c = 11$$



ساده سازی ۲

$$(r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow ((p \vee \sim p) \wedge (q \wedge \sim r)) \equiv (r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow (q \wedge \sim r)$$

(q ∧ ~r)

گام ۳ حالا شروع به حذف گزینه‌ها می‌کنیم. سطر سوم جدول می‌گوید وقتی p و r درست ولی q نادرست باشد، باید X درست شود. ببینیم در کدام گزینه چنین اتفاقی نمی‌افتد:

$$(q \Rightarrow (p \vee r)) \Rightarrow (\sim q \wedge r) \equiv (\sim d \Rightarrow d) \Rightarrow (d \wedge d) \equiv d \Rightarrow d \equiv d : \checkmark$$

$$(r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow (q \wedge \sim r) \equiv (d \Rightarrow d) \Rightarrow (\sim d \wedge \sim d) \equiv \sim d \Rightarrow \sim d \equiv \sim d : \times$$

همین جا ۲ را حذف می‌کنیم.

$$[p \Rightarrow ((q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r))] \Rightarrow (\sim (p \vee r) \wedge q)$$

$$\equiv [d \Rightarrow (d \Rightarrow \sim d)] \Rightarrow (\sim d \wedge \sim d) \equiv [d \Rightarrow \sim d] \Rightarrow \sim d \equiv \sim d : \checkmark$$

$$(r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim (p \wedge r))] \wedge q$$

$$\equiv [d \Rightarrow d] \Rightarrow [(d \Rightarrow d) \wedge \sim d] \equiv d \Rightarrow \sim d \equiv \sim d : \times$$

پس ۴ هم حذف شد.

گام ۴ در ادامه اگر سطر دوم را هم کنترل کنیم، ۳ هم حذف می‌شود. این سطر می‌گوید اگر p و q درست، ولی r نادرست باشد، X هم باید نادرست شود که چنین اتفاقی برای ۳ نمی‌افتد:

$$[p \Rightarrow ((q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r))] \Rightarrow (\sim (p \vee r) \wedge q)$$

$$\equiv [d \Rightarrow (d \Rightarrow \sim d)] \Rightarrow (\sim d \wedge d) \equiv \sim d \Rightarrow d \equiv d$$

پس تنها گزینه باقی‌مانده، یعنی ۱ جواب است.

مشاوره سر جلسه کنکور برای بار اول باید از این سؤال رد شوید، چون هم بسیار وقت‌گیر و هم احتمال اشتباه‌کردن زیاد است.

گزینه ۴

استراتژی اول طرفین معادله $ax^2 - ax - b = 0$ را بر a تقسیم کنید (در معادله درجه دوم، ضریب x^2 ، یعنی a مخالف صفر است، به همین خاطر حق انجام چنین کاری را داریم)، بعد α و β را در خود معادله جای‌گذاری کنید تا بتوانید α^2 و β^2 را برحسب α و β بنویسید. در ادامه α^2 و β^2 ای را که برحسب α و β به دست آوردید، در تساوی $17 = 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 4\alpha^2$ جای‌گذاری کنید. این‌طوری به عبارتی می‌رسید که بلید آن را برحسب S و P بنویسید.

درس‌نامه اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $Ax^2 + Bx + C = 0$ با شرط $\Delta > 0$ باشند، داریم:

ضرب ریشه‌ها: $P = \alpha\beta = \frac{C}{A}$ جمع ریشه‌ها: $S = \alpha + \beta = -\frac{B}{A}$

مجموع مربعات ریشه‌ها: $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$ اختلاف ریشه‌ها: $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|A|}$

گام ۱ طبق استراتژی، اول طرفین معادله $ax^2 - ax - b = 0$ را بر a تقسیم می‌کنیم:

$$ax^2 - ax - b = 0 \xrightarrow{\div a} x^2 - x - \frac{b}{a} = 0 \quad (*)$$

گام ۲ α و β ریشه‌های متمایز معادله (*) هستند، پس می‌توانیم α و β را در معادله (*) جای‌گذاری کنیم:

$$x^2 - x - \frac{b}{a} = 0 \begin{cases} x=\alpha \rightarrow \alpha^2 - \alpha - \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow \alpha^2 = \alpha + \frac{b}{a} \\ x=\beta \rightarrow \beta^2 - \beta - \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow \beta^2 = \beta + \frac{b}{a} \end{cases}$$

سؤال می‌خواهد $a + b + c = 9$ باشد، پس تساوی قبل را به این صورت می‌نویسیم:

$$(a + b + c) + b = 11 \Rightarrow 9 + b = 11 \Rightarrow b = 2$$

پس تساوی (۱) به این صورت می‌شود:

$$\{a - 2, c\} = \{6, 5, -1\} \Rightarrow \{a - 2, c\} = \{6, -1\}$$

برای برقراری تساوی بالا هم دو حالت داریم:

$$\begin{cases} a - 2 = 6 \Rightarrow a = 8 \\ c = -1 \end{cases}, \begin{cases} a - 2 = -1 \Rightarrow a = 1 \\ c = 6 \end{cases}$$

پس تا این جا ۲ جواب پیدا کردیم.

گزینه ۵ عضو تکراری باشد: در این حالت داریم: (۲) $\{a - 2, 6, 2b + 1, c\} = \{6, 5, -1\}$ مثل حالت قبلی مجموع اعضای دو مجموعه را مساوی هم می‌گذاریم:

$$(a - 2) + 6 + (2b + 1) + c = 6 + 5 + -1 \Rightarrow a + 2b + c + 5 = 15 \Rightarrow a + 2b + c = 10$$

$$\Rightarrow (a + b + c) + b = 10 \Rightarrow b = 1$$

$b = 1$ را در تساوی (۲) جای‌گذاری می‌کنیم: $\{a - 2, 6, 3, c\} = \{6, 5, -1\}$ تساوی بالا هیچ وقت برقرار نمی‌شود، چون مجموعه سمت راست اصلاً عضو «۳» ندارد.

گزینه ۱ عضو تکراری باشد: در این حالت داریم:

$$\{a - 2, 6, 2b + 1, c\} = \{6, 5, -1, -1\} \quad (3)$$

باز هم مجموع اعضای دو مجموعه را مساوی هم می‌گذاریم:

$$(a - 2) + 6 + (2b + 1) + c = 6 + 5 + -1 - 1 \Rightarrow a + 2b + c + 5 = 9 \Rightarrow a + 2b + c = 4$$

$$\Rightarrow (a + b + c) + b = 4 \Rightarrow b = -5$$

حالا $b = -5$ را در تساوی (۳) جای‌گذاری می‌کنیم: $\{a - 2, 6, -9, c\} = \{6, 5, -1, -1\}$ تساوی بالا هیچ وقت نمی‌تواند برقرار شود، چون مجموعه سمت راست اصلاً عضو «-۹» ندارد؛ پس در کل همان ۲ جوابی که در حالت اول به دست آوردیم را داریم.

گزینه ۴

استراتژی اول سعی می‌کنیم گزینه‌ها را ساده‌تر بنویسیم. برای این کار به دنبال گزاره‌هایی می‌گردیم که ارزششان کاملاً معلوم است. بعد از این کار سیاست حذف گزینه را پیش می‌گیریم؛ یعنی می‌بینیم کدام گزینه ارزشش طبق سطرهای جدول نیست. این سیاست را تا جایی ادامه می‌دهیم که سه گزینه حذف شود.

درس‌نامه ۱ جدول ارزش انواع ترکیب گزاره‌ها را برای دو گزاره p و q در جدول زیر ببینید:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	ن	د

$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$
این گزاره فقط وقتی نادرست می‌شود که هر دو گزاره نادرست باشند.	این گزاره فقط وقتی درست است که هر دو گزاره درست باشند.	این گزاره فقط وقتی نادرست است که گزاره اول (p) درست، ولی گزاره دوم (q) نادرست باشد.

۲ به کمک جدول بالا می‌توانیم دو هم‌ارزی زیر را بنویسیم:

$$p \vee \sim p \equiv d, \quad d \wedge \sim d \equiv \text{خودش}$$

گام ۱ طبق استراتژی، اول گزینه‌ها را ساده می‌کنیم. طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم در ۱ و ۲، گزاره $p \vee \sim p$ همیشه درست است، پس این گزینه‌ها را می‌توانیم ساده‌تر بنویسیم:

ساده سازی ۱

$$(q \Rightarrow (p \vee r)) \Rightarrow ((p \vee \sim p) \wedge (\sim q \wedge r)) \equiv (q \Rightarrow (p \vee r)) \Rightarrow (\sim q \wedge r)$$



۴ فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با: $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

۵ همان طور که در شکل مقابل می بینید، در هر مستطیل، وسط قطر، همان مرکز مستطیل است که فاصله آن تا اضلاع مستطیل برابر نصف اندازه طول و نصف اندازه عرض است.



۶ شیب خط $4x + y = 3$ (یا همان $4x + y - 3 = 0$) برابر -4 و شیب خط $x - 4y = 5$ (یا همان $x - 4y - 5 = 0$) برابر $\frac{1}{4}$ است (طبق مورد (۲) درس نامه). چون

این دو خط شیب هایشان قرینه و معکوس یکدیگر است، پس طبق مورد (۳) درس نامه، هم عمودند؛ بنابراین این دو خط، دو ضلع مجاور مستطیل هستند؛ ببینید:

۷ نقطه $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ روی هیچ کدام از دو خط $4x + y - 3 = 0$ و $x - 4y - 5 = 0$ قرار ندارد، چون:

بنابراین نقطه $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ ، مختصات رأس C (که روی هیچ کدام از این دو خط نیست) می شود.

۸ فاصله نقطه $C(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ از این دو خط را به دست می آوریم تا اندازه طول و عرض مستطیل به دست آید:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{cases} \xrightarrow{4x+y-3=0, (\frac{4}{5}, \frac{2}{5})} \frac{|\frac{4}{5} + \frac{2}{5} - 3|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17} \\ \xrightarrow{x-4y-5=0, (\frac{4}{5}, \frac{2}{5})} \frac{|\frac{4}{5} - \frac{8}{5} - 5|}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17} \end{cases}$$

۹ بنابراین اندازه طول مستطیل برابر $\sqrt{17}$ است. طبق مورد (۵) درس نامه، فاصله وسط قطر از اضلاع مستطیل برابر نصف اندازه طول و عرض مستطیل یعنی $\frac{\sqrt{17}}{2}$ و $\frac{\sqrt{17}}{4}$ می شود. سؤال بیشترین فاصله را می خواهد، پس جواب می شود $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

۸- گزینه ۴

۱۰ استراتژی اول $y = 10$ را در خط $y = 12 - x$ ، جای گذاری کنید تا طول نقطه تقاطع f^{-1} با این خط به دست آید. بعد مختصات نقطه تقاطع به صورت $(2, 10)$ می شود، این یعنی $f^{-1}(2) = 10$ است. در آخر با حل معادله $f(10) = 2$ مقدار m و $f(m+4)$ به دست می آید.

۱۱ درس نامه اگر $f^{-1}(\alpha) = \beta$ باشد، آن گاه $f(\beta) = \alpha$ می شود.

۱۲ ابتدا یک شکل فرضی رسم می کنیم: عرض نقطه تقاطع $y = 10$ است، از طرفی نقطه تقاطع روی خط $y = 12 - x$ قرار دارد، پس با جای گذاری $y = 10$ در این خط، طول نقطه تقاطع می شود: $10 = 12 - x \Rightarrow x = 2$ بنابراین مختصات نقطه تقاطع $(2, 10)$ است.

۱۳ از نقطه $(2, 10)$ می گذرد، پس $f^{-1}(2) = 10$ می شود. حالا طبق درس نامه، می توانیم بگوییم $f(10) = 2$ می شود:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x - 2\sqrt{mx - 1}} \Rightarrow f(10) = \sqrt{10 - 2\sqrt{10m - 1}} = 2 \\ \xrightarrow{\text{توان } 2} 10 - 2\sqrt{10m - 1} &= 4 \Rightarrow -2\sqrt{10m - 1} = -6 \\ \xrightarrow{\div (-2)} \sqrt{10m - 1} &= 3 \xrightarrow{\text{توان } 2} 10m - 1 = 9 \Rightarrow 10m = 10 \Rightarrow m = 1 \end{aligned}$$

بنابراین ضابطه f به این صورت شد:

۱۴ حالا که m را داریم، می توانیم مقدار $f(\frac{m}{4})$ را محاسبه کنیم:

$$f(\frac{m}{4}) = f(\frac{1}{4}) = \sqrt{\frac{1}{4} - 2\sqrt{\frac{1}{4} - 1}} = \sqrt{1} = 1$$

۱۵ حالا تساوی های قبل را در $40\beta^2 + 20\alpha^2 - 20\beta = 17$ جای گذاری می کنیم:

$$\begin{aligned} 40(\beta + \frac{b}{a}) + 20(\alpha + \frac{b}{a}) - 20\beta &= 17 \Rightarrow 40\beta + \frac{40b}{a} + 20\alpha + \frac{20b}{a} - 20\beta = 17 \\ \Rightarrow 20\beta + 20\alpha + \frac{60b}{a} &= 17 \Rightarrow 20(\alpha + \beta) + \frac{60b}{a} = 17 \quad (***) \end{aligned}$$

۱۶ حالا S را از معادله $\frac{1}{A}x^2 - \frac{1}{B}x - \frac{b}{a} = 0$ حساب می کنیم: $S = -\frac{B}{A} = -\frac{-1}{1} = 1$

در ادامه $S = 1$ را در تساوی $(**)$ جای گذاری می کنیم:

$$20(1) + \frac{60b}{a} = 17 \Rightarrow \frac{60b}{a} = -3 \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{-3}{60} = \frac{-1}{20} \Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{1}{20}$$

۱۷ در آخر به جای $-\frac{b}{a}$ در تساوی $(*)$ ، $\frac{1}{20}$ را قرار می دهیم: $x^2 - x + \frac{1}{20} = 0$ اختلاف ریشه های این معادله برابر است با:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{1 - 4 \times \frac{1}{20}}}{1} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

۹- گزینه ۳

۱۸ استراتژی در سمت چپ معادله از اتحاد $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ استفاده کنید تا به یک معادله ساده تر برسید، بعد در معادله ساده شده از تغییر متغیر استفاده کنید.

۱۹ طبق استراتژی در سمت چپ معادله از اتحاد $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} &= \frac{16}{9} \Rightarrow (\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x})^2 - 2(\frac{1}{x})(\frac{1}{1-x}) = \frac{16}{9} \\ \Rightarrow (\frac{1-x+x}{x(1-x)})^2 - \frac{2}{x(1-x)} &= \frac{16}{9} \Rightarrow (\frac{1}{x(1-x)})^2 - 2(\frac{1}{x(1-x)}) - \frac{16}{9} = 0 \end{aligned}$$

۲۰ در ادامه از تغییر متغیر $t = \frac{1}{x(1-x)}$ کمک می گیریم: $t^2 - 2t - \frac{16}{9} = 0$

حالا ریشه های معادله بالا را از روش Δ به دست می آوریم. اول Δ را حساب می کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-\frac{16}{9}) = 4 + \frac{64}{9} = \frac{676}{9} = (\frac{26}{3})^2$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm \frac{26}{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{16}{3} \\ t_2 = -\frac{10}{3} \end{cases}$$

پس داریم:

۲۱ در آخر های به دست آمده را در $\frac{1}{x(1-x)} = t$ جای گذاری می کنیم:

$$\begin{aligned} \diamond \frac{1}{x(1-x)} &= \frac{16}{3} \Rightarrow x(1-x) = \frac{3}{16} \Rightarrow x - x^2 = \frac{3}{16} \\ \Rightarrow x^2 - x + \frac{3}{16} &= 0 \xrightarrow{\Delta = \frac{1}{4} < 0} \text{مجموع ریشه ها} = -\frac{-1}{1} = 1 \\ \diamond \frac{1}{x(1-x)} &= -\frac{10}{3} \Rightarrow x(1-x) = -\frac{3}{10} \Rightarrow x - x^2 = -\frac{3}{10} \\ \Rightarrow x^2 - x - \frac{3}{10} &= 0 \xrightarrow{\Delta = \frac{29}{10} > 0} \text{مجموع ریشه ها} = -\frac{-1}{1} = 1 \end{aligned}$$

بنابراین جمع ریشه های معادله می شود $1 + 1 = 2$.

۱۰- گزینه ۱

۲۲ استراتژی اول فاصله نقطه $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ از دو خط $4x + y = 3$ و $x - 4y = 5$ را محاسبه کنید تا اندازه طول و عرض مستطیل به دست آید. حالا بیشترین فاصله وسط قطر از اضلاع، برابر نصف اندازه طول مستطیل می شود.

۲۳ درس نامه ۱ خط $ax + by = c$ از نقطه $A(x_0, y_0)$ می گذرد، اگر و تنها اگر $ax_0 + by_0 = c$ شود.

۲۴ شیب خط $ax + by = c$ برابر است با: $-\frac{a}{b}$

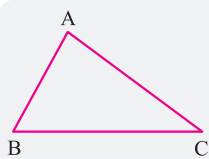
۲۵ هر وقت شیب دو خط، قرینه و معکوس همدیگر باشند، دو خط بر هم عمودند و برعکس.



۹- گزینه ۱

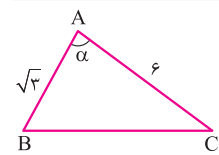
تیزبازی با توجه به شکل، واضح است که $\alpha < 45^\circ$ است. از طرفی می‌دانیم اگر $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ باشد، $\cot \alpha > 1$ است. در بین گزینه‌ها فقط مقدار (۲) بزرگ‌تر از ۱ است؛ پس جواب همین گزینه است.

۱۱- گزینه ۱



درس‌نامه مساحت یک مثلث را می‌توانیم با استفاده از سینوس زوایای داخلی‌اش، به دست آوریم؛ مثلاً برای مثلث ABC در شکل مقابل داریم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}$$



گام ۱ ابتدا یک شکل فرضی برای سؤال رسم می‌کنیم؛ فرض کنید $AB = \sqrt{3}$ ، $AC = 6$ و زاویه بین این دو یعنی $\hat{A}$ برابر α است.

گام ۲ با کمک فرمول درس‌نامه، مساحت این مثلث را به دست می‌آوریم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha \Rightarrow 4/5 = \frac{\sqrt{3} \times 6 \times \sin \alpha}{2}$$

$$\Rightarrow 9 = 6\sqrt{3} \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{9}{6\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

گام ۳ می‌دانیم در هر مثلث، هر زاویه بین صفر و 180° درجه است، پس α هم بین صفر و 180° است که می‌تواند برابر 60° یا 120° شود (سینوس 60° و 120° برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است)، پس بیشترین مقدار α ، دو برابر کم‌ترین مقدار آن است.

۱۲- گزینه ۴

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

۲ برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی، می‌توانیم هر مضرب زوج دلخواهی از π را اضافه یا کم کنیم.

۳ نسبت‌های مثلثاتی $\alpha + \frac{\pi}{4}$ به شکل زیرند:

$\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \cos \alpha$	$\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = -\sin \alpha$
$\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = -\cot \alpha$	$\cot(\alpha + \frac{\pi}{4}) = -\tan \alpha$

۴ برای به دست آوردن دوره تناوب توابع سینوسی و کسینوسی از روی نمودار، از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

یک تناوب کامل	نصف تناوب	یک چهارم تناوب

۵ در توابع مثلثاتی به شکل $y = a + b \cos(cx)$ داریم:

$$\begin{cases} \max = a + |b| \\ \min = a - |b| \\ a = \frac{\max + \min}{2} \end{cases} \quad \text{الف)} \quad \text{ب)} \quad T = \frac{2\pi}{|c|}$$

پ) اگر نمودار تابع در محل برخورد با محور y ها به شکل قله باشد، $b > 0$ و اگر به شکل دره باشد، $b < 0$ است.

درس‌نامه ۱ برای از بین بردن توان در معادلات نمایی، می‌توانیم از طرفین در یک مبنای دلخواه، مثلاً X لگاریتم بگیریم که در این صورت، توان تبدیل به ضرب می‌شود:

$$a^n = b^m \Rightarrow \log_x a^n = \log_x b^m \Rightarrow n \log_x a = m \log_x b$$

۲ بعضی از قوانین لگاریتم به شکل زیرند:

$$\text{الف)} \log_b a^m = \frac{m}{n} \log_b a$$

$$\text{ب)} \log_a 1 = 0$$

$$\text{پ)} \log ab = \log a + \log b$$

$$\text{ت)} \log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

$$\text{ث)} \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

گام ۱ این عنصر در هر ساعت $\frac{1}{9}$ جرم خود را از دست می‌دهد، یعنی جرم آن $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ برابر می‌شود؛ بنابراین پس از n ساعت، جرم عنصر $(\frac{8}{9})^n$ برابر می‌شود.

گام ۲ برای این که بینیم پس از چند ساعت، $\frac{1}{6}$ از جرم عنصر باقی خواهد ماند، باید معادله $(\frac{8}{9})^n = \frac{1}{6}$ را حل کنیم. از دو طرف این معادله در مبنای ۵ لگاریتم می‌گیریم:

$$(\frac{8}{9})^n = \frac{1}{6} \Rightarrow \log_5 (\frac{8}{9})^n = \log_5 \frac{1}{6} \xrightarrow{\text{قسمت (۲- الف) درس‌نامه}} n \log_5 \frac{8}{9} = \log_5 \frac{1}{6}$$

$$\xrightarrow{\text{قسمت (۲- ت) درس‌نامه}} n (\log_5 8 - \log_5 9) = \log_5 1 - \log_5 6$$

$$\xrightarrow{\text{قسمت (۲- الف و ب) درس‌نامه}} n (3 \log_5 2 - 2 \log_5 3) = -(\log_5 2 + \log_5 3) (*)$$

گام ۳ حالا سراغ داده‌های سؤال می‌رویم:

$$\begin{cases} \log_5 2 = \frac{1}{2/4} = \frac{1}{1/2} = \frac{1}{10} = \frac{1}{24} = \frac{1}{12} \\ \log_5 3 = \frac{1}{1/4} = \frac{1}{1/14} = \frac{1}{10} = \frac{1}{14} = \frac{1}{14} \end{cases} \xrightarrow{\text{قسمت (۲- ت) درس‌نامه}}$$

گام ۴ مقادیر به دست آمده را در (*) جای گذاری می‌کنیم:

$$n (3 \times \frac{1}{12} - 2 \times \frac{1}{14}) = -(\frac{1}{12} + \frac{1}{14}) \Rightarrow n (\frac{3}{12} - \frac{2}{14}) = -(\frac{1}{12} + \frac{1}{14})$$

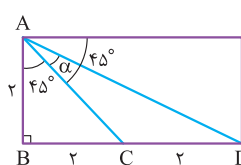
$$\Rightarrow n \times \frac{-3}{84} = -\frac{19}{84} \Rightarrow n = \frac{19}{3}$$

بنابراین پس از $\frac{19}{3}$ ساعت یا همان « 380° » دقیقه، $\frac{1}{6}$ از جرم عنصر باقی خواهد ماند.

۱۰- گزینه ۲

درس‌نامه فرمول تانژانت مجموع و تفاضل دو زاویه به شکل زیر است:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$



گام ۱ همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، مثلث ABC قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است؛ پس می‌توانیم بگوییم $\hat{BAC} = 45^\circ$ می‌شود. حالا در مثلث ABD، تانژانت می‌نویسیم:

$$\tan \hat{BAD} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \tan(45^\circ + \alpha) = \frac{4}{3} = 2$$

گام ۲ حالا با استفاده از فرمول درس‌نامه، $\tan(45^\circ + \alpha)$ را باز می‌کنیم:

$$\tan(45^\circ + \alpha) = \frac{\tan 45^\circ + \tan \alpha}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan \alpha} \xrightarrow{\tan 45^\circ = 1} 2 = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha}$$

$$\Rightarrow 2 - 2 \tan \alpha = 1 + \tan \alpha \Rightarrow -3 \tan \alpha = -1 \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\cot \alpha = 3$$

نکته

طبق نکته بالا می‌توانیم بگوییم:



مشاوره هر وقت در سؤالی $A = \sin x \pm \cos x$ را داشتید و مقدار $\sin x \cdot \cos x$ یا

$\sin(2x)$ را می‌خواستید، کافی است طرفین معادله (*) را به توان ۲ برسانید تا جواب حاصل شود.



۱۴- گزینه ۱

استراتژی باید سه نامعادله $-3 + 2m - m^2 < 0$ ، $-3 + 2m - m^2 < 0$ و $m^2 - m - 5 < 0$ را حل کنید و از جواب‌ها اشتراک بگیرید.

درس‌نامه ۱ اگر دامنه تابع $f(x)$ بازه A باشد، برای به دست آوردن دامنه تابع $f(O)$ ، باید شرط $O \in A$ را اجرا کنید؛ مثلاً اگر دامنه تابع $f(x)$ بازه $[-2, 3]$ باشد، برای به دست آوردن دامنه تابع $f(2x - 5)$ باید نامعادله $-2 \leq 2x - 5 < 3$ را حل کنیم. اگر f تابعی اکیداً نزولی باشد، داریم:

گام ۱ دامنه f مجموعه‌ای از مقادیر منفی (یا همان $(-\infty, 0)$) است، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، برای به دست آوردن دامنه $f(-3 + 2m - m^2)$ باید نامعادله زیر را حل کنیم:

$$-3 + 2m - m^2 < 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 3 > 0$$

دلتای عبارت سمت چپ منفی ($\Delta = 4 - 12 = -8$) و ضریب m^2 مثبت است، پس نامساوی بالا همیشه برقرار است؛ بنابراین مجموعه جواب آن $\mathbb{R}$ می‌شود.

گام ۲ حالا دامنه $f(m^2 - m - 5)$ را به دست می‌آوریم:

$$m^2 - m - 5 < 0 \xrightarrow{\Delta=21 \text{ ریشه‌ها}} \begin{cases} m_1 = \frac{1+\sqrt{21}}{2} \\ m_2 = \frac{1-\sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

جدول تعیین علامت رسم می‌کنیم:

	$\frac{1-\sqrt{21}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{21}}{2}$	
+		-		+

به دنبال قسمت‌های منفی هستیم، پس:

$$m \in \left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}, \frac{1+\sqrt{21}}{2} \right)$$

$\sqrt{21}$ تقریباً برابر $4/6$ است، پس بازه بالا را می‌توانیم به این صورت بنویسیم:

$$\left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}, \frac{1+\sqrt{21}}{2} \right) = \left(-\frac{3}{6}, \frac{5}{6} \right) = (-1/8, 2/8) \quad (I)$$

گام ۳ f تابعی اکیداً نزولی است، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه داریم:

$$f(m^2 - m - 5) < f(-3 + 2m - m^2) \Rightarrow m^2 - m - 5 > -3 + 2m - m^2$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 3m - 2 > 0 \xrightarrow{\Delta=25 \text{ ریشه‌ها}} \begin{cases} m_1 = \frac{3+5}{4} = 2 \\ m_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

جدول تعیین علامت رسم می‌کنیم:

	$-\frac{1}{2}$		2	
+		-		+

این جا قسمت‌های مثبت را می‌خواهیم، پس:

$$m \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (2, +\infty) \quad (II)$$

گام ۴ در آخر با اشتراک گرفتن از دو بازه (I) و (II) جواب حاصل می‌شود:

$$\Rightarrow (I) \cap (II) = (-1/8, -\frac{1}{2}) \cup (2, 2/8)$$

این بازه فقط شامل یک عدد صحیح (فقط شامل -۱) است.



۱۵- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ ضابطه یک تابع هموگرافیک به شکل $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (البته به شرطی که $c \neq 0$ و $ad - bc \neq 0$ باشند) و ضابطه وارونش هم به شکل $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

گام ۱ ابتدا با استفاده از مورد (۱) درس‌نامه داریم:

$$\sin(cx - \frac{3\pi}{4}) \cos(cx - \frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{2} \sin(2cx - \frac{3\pi}{2})$$

با توجه به مورد (۲) درس‌نامه می‌توانیم به $(2cx - \frac{3\pi}{2})$ اضافه کنیم:

$$\frac{1}{2} \sin(2cx - \frac{3\pi}{2} + 2\pi) = \frac{1}{2} \sin(2cx + \frac{\pi}{2}) \xrightarrow{\text{مورد (۳) درس‌نامه}} \frac{1}{2} \cos(2cx)$$

بنابراین ساده‌شده ضابطه f به صورت مقابل است:

گام ۲ با توجه به نمودار تابع، از $x = 0$ تا $x = \pi$ یک تناوب کامل داریم، پس $T = \pi$ است. حالا با استفاده از مورد (۵ - ب) درس‌نامه، داریم:

$$\frac{T}{|c|} = \frac{\pi}{1} \Rightarrow |c| = 1$$

نکته $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$

از آن جایی که کسینوس یک زاویه و کسینوس قرینه آن زاویه (طبق نکته بالا) با هم برابرند، C می‌تواند برابر $+1$ یا -1 باشد، حالا ما برای راحتی فرض می‌کنیم $C = 1$ است. **گام ۳** همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، نمودار تابع در محل برخورد با محور y ها به شکل دره است، پس طبق مورد (۵ - پ) درس‌نامه، $\frac{b}{a} < 0$ و در نتیجه $b < 0$ است.

گام ۴ حداکثر مقدار این تابع برابر 3 و حداقل آن برابر -1 است؛ پس طبق مورد (۵) درس‌نامه داریم:

$$\begin{cases} a + \frac{b}{c} = 3 \\ a - \frac{b}{c} = -1 \end{cases} \xrightarrow{b < 0} \begin{cases} a - \frac{b}{c} = 3 \\ a + \frac{b}{c} = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = 1, b = -4$$

پس ضابطه f به صورت $f(x) = 1 - 2\cos(2x)$ است.

گام ۵ صفرهای تابع f را می‌خواهیم:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2\cos(2x) = 0 \Rightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2}$$

به جای $\frac{1}{2}$ قرار می‌دهیم $\cos(\frac{\pi}{3})$:

نکته جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos A = \cos B$ به صورت $A = 2k\pi \pm B$ است.

حالا جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos(2x) = \cos(\frac{\pi}{3})$ را به کمک نکته بالا به دست می‌آوریم:

$$2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

اختلاف این دو جواب، برابر $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ است.



۱۳- گزینه ۳

درس‌نامه فرمول کسینوس مجموع و تفاضل دو زاویه به شکل زیر است:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$$

گام ۱ ابتدا با کمک درس‌نامه، $\cos(x + \frac{\pi}{4})$ را ساده می‌کنیم:

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos x \cdot \frac{\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} - \sin x \cdot \frac{\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\times \frac{\sqrt{2}}{2}} \cos x - \sin x = \frac{2}{\sqrt{6}} \quad (I)$$

طرفین (I) را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} - \underbrace{2\sin x \cdot \cos x}_{\sin(2x)} = \frac{4}{6} \Rightarrow \sin(2x) = \frac{1}{3} \quad (II)$$

گام ۲ با جای‌گذاری (I) و (II) در معادله $m(\cos x - \sin x) - 3\sqrt{6} \sin(2x) = \sqrt{6}$ داریم:

$$m \times \frac{2}{\sqrt{6}} - 3\sqrt{6} \times \frac{1}{3} = \sqrt{6} \Rightarrow \frac{2m}{\sqrt{6}} - \sqrt{6} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \frac{2m}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6} \Rightarrow \frac{m}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \Rightarrow m = 6$$



گام ۱ پیوستگی f در $x = -1$ را بررسی می‌کنیم. برای به دست آوردن حد راست f در $x \rightarrow (-1)^+$ داریم:

$$x \rightarrow (-1)^+ \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x - [x] + k) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x + 1 + k) = -1 + 1 + k = k$$

حد چپ f در $x = -1$ برابر است با:

$$x \rightarrow (-1)^- \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} |x - [-x]|$$

مقدار $[-x]$ وقتی $x \rightarrow (-1)^-$ (مثلاً $x = -1/1$) برابر است $([-(-1/1)] = [1/1] = 1)$:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} |x - [-x]| = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} |x - 1| = |-1 - 1| = 2$$

مقدار f در $x = -1$ هم برابر است با:

$$x = -1 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = x - [x] + k \Rightarrow f(-1) = -1 - (-1) + k = k$$

حالا حد راست، حد چپ و مقدار f در $x = -1$ را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = f(-1) \Rightarrow k = 2 = k \Rightarrow k = 2$$

بنابراین به ازای مقدار مشخص k ، f در $n = 2$ فرد پیوسته است.

گام ۲ حالا پیوستگی f به ازای $n = 2$ را بررسی می‌کنیم:

$$x \rightarrow 2^+ \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} |x - [-x]|$$

حد راست f در $x = 2$:

مقدار $[-x]$ وقتی $x \rightarrow 2^+$ (مثلاً $x = 2/1$) برابر -3 است $([-2/1] = -3)$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} |x - [-x]| = \lim_{x \rightarrow 2^+} |x - (-3)| = 2 - (-3) = 5$$

مقدار f در $x = 2$ برابر است با:

$$x = 2 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow f(x) = |x - [-x]| \Rightarrow f(2) = |2 - (-2)| = 4$$

حد راست و مقدار f در $x = 2$ برابر نیستند، پس f در $n = 2$ پیوسته نیست و n نمی‌تواند زوج باشد.

۱۷- گزینه ۳

استراتژی اول ضابطه g را به دست آورید، بعد از هم‌ارزی‌های مثلثاتی استفاده کنید.

درس‌نامه وقتی $u \rightarrow 0$ ، هم‌ارزی مثلثاتی مقابل را برای سینوس داریم: $\sin(u) \approx u$

گام ۱ اول ضابطه $g(x)$ را تنها می‌کنیم:

$$f(x) = xg(x) + 1 \Rightarrow xg(x) = f(x) - 1 \Rightarrow g(x) = \frac{f(x) - 1}{x}$$

حالا به جای $f(x)$ در تساوی بالا، ضابطه آن را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{(\frac{-1 + \sin x}{1 + \sin x})^2 - 1}{x} = \frac{\frac{\sin^2 x - 2\sin x + 1}{1 + \sin x} - 1}{x}$$

$$= \frac{\frac{\sin^2 x - 2\sin x + 1 - \sin^2 x - 2\sin x + 1}{1 + \sin x}}{x} = \frac{-4\sin x}{x(1 + \sin x)}$$

$$= \frac{-4\sin x}{x(1 + \sin x)} = \frac{-4\sin x}{x(\sin^2 x + 2\sin x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4\sin x}{x(\sin^2 x + 2\sin x + 1)}$$

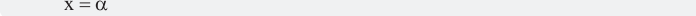
در حد بالا $x \rightarrow 0$ است، پس طبق درس‌نامه، می‌توانیم به جای $\sin x$ قرار دهیم x :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x}{x(x^2 + 2x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4}{x^2 + 2x + 1} = -4$$

۱۸- گزینه ۱

درس‌نامه ۱) قرینه نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور x ها، منحنی $y = -f(x)$ است.

۲) شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه‌ای به طول $x = \alpha$ واقع بر آن، برابر $f'(\alpha)$ است. برای درک بهتر این موضوع شکل مقابل را ببینید:



۲ هم‌ارزی پرتوان: برای محاسبه حد در بی‌نهایت یک تابع کسری (مثلاً $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{g}$)، کافی است در صورت و مخرج، فقط جمله با بزرگ‌ترین توان x را نگه دارید و بقیه جملات را حذف کنید، برای مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 2}{5x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{5x} = \frac{4}{5}$$

گام ۱ f تابعی هموگرافیک است، پس ضابطه آن را می‌توانیم به صورت $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ در نظر بگیریم؛ این جوری ضابطه g به شکل $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{cx + d}{ax + b}$ می‌شود.

گام ۲ ضابطه f^{-1} و g^{-1} را به کمک مورد (۱) درس‌نامه به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}$$

$$g(x) = \frac{cx + d}{ax + b} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{-bx + d}{ax - c}$$

حالا حاصل حدهای داده‌شده را با کمک هم‌ارزی پرتوان حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{ax + b}{cx + d}}{\frac{-bx + d}{ax - c}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(ax + b)(ax - c)}{(cx + d)(-bx + d)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^2 x^2 + (ab - ac)x - bc}{-bcx^2 + (cd - bd)x + d^2} \xrightarrow[\text{پرتوان}]{\text{هم‌ارزی}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^2 x^2}{-bcx^2} = -\frac{a^2}{bc}$$

سراغ حد دیگر می‌رویم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-bx + d}{ax - c}}{\frac{cx + d}{ax + b}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-bx + d)(ax + b)}{(ax - c)(cx + d)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-abx^2 + (ad - b^2)x + bd}{acx^2 + (ad - c^2)x - cd} \xrightarrow[\text{پرتوان}]{\text{هم‌ارزی}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-abx^2}{acx^2} = -\frac{ab}{ac} = -\frac{b}{c}$$

به گفته سؤال دو مقدار $-\frac{b}{c}$ و $-\frac{a^2}{bc}$ با هم برابرند، پس:

$$-\frac{a^2}{bc} = -\frac{b}{c} \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{b}{a} = \pm 1$$

گام ۳ در آخر، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-dx + b}{cx - a} = -\frac{b}{a}$$

مقدار $\frac{b}{a}$ برابر ± 1 است، پس مقدار $-\frac{b}{a}$ هم برابر ± 1 می‌شود که تنها ۱ در بین گزینه‌ها است.

۱۶- گزینه ۲

استراتژی کافی است پیوستگی f را به ازای $n = 1$ و $n = 2$ بررسی کنید.

گام ۱ ابتدا فرض کنید $n = 1$ است، پس f باید در $x = n = 1$ و $x = -n = -1$ پیوسته باشد. پیوستگی f در $x = 1$ را بررسی می‌کنیم.

برای به دست آوردن حد راست f در $x = 1$ داریم:

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - [x] + k)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1 + k) = 1 - 1 + k = k$$

حد چپ f در $x = 1$ برابر است با:

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} |x - [-x]|$$

مقدار $[-x]$ وقتی $x \rightarrow 1^-$ (مثلاً $x = 0/9$) برابر -1 است $([-0/9] = -1)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} |x - [-x]| = \lim_{x \rightarrow 1^-} |x - (-1)| = |1 - (-1)| = 2$$

مقدار f در $x = 1$ نیز برابر است با:

$$x = 1 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = x - [x] + k \Rightarrow f(1) = 1 - 1 + k = k$$

حالا حد راست، حد چپ و مقدار f در $x = 1$ را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow k = 2 = k \Rightarrow k = 2$$

پس برای این‌که f در $x = 1$ پیوسته شود، باید $k = 2$ باشد.



برای این که نقطه عطف در ربع دوم باشد، باید عرض آن مثبت شود:

$$\frac{2(k+1)^3}{27vk^2} > 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} \begin{cases} 2(k+1)^3 = 0 \Rightarrow k = -1 \text{ (ریشه فرد)} \\ 27vk^2 = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ (ریشه زوج)} \end{cases}$$

جدول تعیین علامت رسم می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} -1 & 0 & & & \\ \hline - & + & + & + & + \end{array} \xrightarrow{\text{مقادیر مثبت را می‌خواهیم}} (-1, 0) \cup (0, +\infty) \quad (II)$$

از دو بازه (I) و (II) اشتراک می‌گیریم:

$$(I) \cap (II) = (0, +\infty) \Rightarrow$$

این بازه شامل هیچ عدد صحیح منفی‌ای نیست، پس جواب صفر می‌شود.

۲۰- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ نقطه شناور: هر وقت در سوآلی به ما گفته شود که نقطه A روی منحنی $y = f(x)$ قرار دارد (یا بیشترین یا کم‌ترین فاصله نقاط منحنی $y = f(x)$ از فلان چیز را می‌خواهیم)، مختصات نقاط روی منحنی را به صورت $(x, f(x))$ در نظر می‌گیریم؛ برای مثال نقاط روی منحنی $y = \sqrt{x-1}$ را به صورت $(x, \sqrt{x-1})$ فرض می‌کنیم.

۲ در مسائل بهینه‌سازی برای پیدا کردن طول نقاط اکسترمم یک تابع، کافی است ریشه‌های صورت و مخرج مشتق آن را محاسبه کنیم.

۳ فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با: $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

گام ۱ ابتدا دقت کنید برای این که زیر رادیکال منفی نشود، باید $x - [x^2] \geq 0$ ، یعنی $x \geq [x^2]$ باشد. x^2 نامنفی است، پس $[x^2]$ هم نامنفی می‌شود، بنابراین x هم باید نامنفی باشد. حالا با بازه‌بندی داریم:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \leq x < 1 \Rightarrow \sqrt{x - [x^2]} = \sqrt{x} \\ 1 \leq x < \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x - [x^2]} = \sqrt{x-1} \\ \sqrt{2} \leq x < \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{x - [x^2]} = \sqrt{x-2} \\ \vdots \\ \text{بقیه مقادیر نیز غیر قابل قبول اند.} \end{cases}$$

غ‌ق‌ق، چون زیر رادیکال منفی می‌شود.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{x-1} & 1 \leq x < \sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین ضابطه تابع به شکل مقابل می‌شود:

گام ۲ نمودار تابع f و خط $2x - y + 2 = 0$ را رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودار رسم‌شده، واضح است نقاطی از منحنی f که کم‌ترین فاصله را تا خط دارند، روی $\sqrt{x}$ قرار دارند.

گام ۳ نقاط روی $f(x) = \sqrt{x}$ را به صورت $A(x, \sqrt{x})$ نمایش می‌دهیم. فاصله این نقاط از خط $2x - y + 2 = 0$ برابر است با:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \xrightarrow{\substack{a=2, b=-1, c=2 \\ (x_0, y_0) = (x, \sqrt{x})}} d(x) = \frac{|2x - \sqrt{x} + 2|}{\sqrt{4+1}}$$

x در بازه $(0, 1)$ است که در این بازه، $2x - \sqrt{x} + 2$ مثبت است، پس می‌توانیم قدرمطلق را برداریم:

$$d(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times (2x - \sqrt{x} + 2)$$

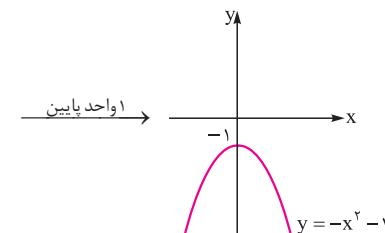
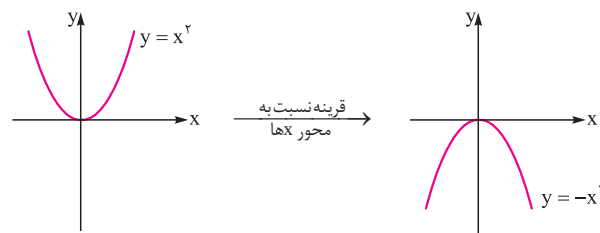
گام ۴ از تابع $d(x)$ مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم تا طول نقاط اکسترمم به دست آیند:

$$d'(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times (2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}) = 0 \Rightarrow 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{16}$$

۳ اگر دو خط d و d' بر هم عمود باشند، حاصل ضرب شیب‌هایشان -1 می‌شود.

گام ۱ قرینه سهمی $y = x^2 + 1$ نسبت به محور x ها، طبق مورد (۱) درس‌نامه، سهمی $y = -x^2 - 1$ است که نمودار آن در سه مرحله رسم می‌شود:



گام ۲ نمودار $y = -x^2 - 1$ نسبت به محور y ها متقارن است، پس می‌توانیم فرض کنیم خط d این منحنی را در دو نقطه به طول‌های α و $-\alpha$ قطع می‌کند. ($\alpha > 0$)

گام ۳ مشتق تابع $y = -x^2 - 1$ به صورت $y' = -2x$ است، پس شیب خط مماس بر سهمی در نقطه‌ای به طول α برابر -2α و شیب خط مماس بر آن در نقطه‌ای به طول $-\alpha$ برابر 2α است. (مورد (۲) درس‌نامه).

گام ۴ این دو خط بر هم عمودند، پس طبق مورد (۳) درس‌نامه، حاصل ضرب شیب‌هایشان -1 است:

$$\begin{aligned} (-2\alpha) \times (2\alpha) &= -1 \Rightarrow 4\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{4} \\ \alpha > 0 &\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

گام ۵ با جای‌گذاری $\alpha = \frac{1}{2}$ به جای x در ضابطه $y = -x^2 - 1$ عرض نقطه A برابر $y = -(\frac{1}{2})^2 - 1 = -\frac{5}{4}$ می‌شود، پس فاصله خط d از مبدأ مختصات $1/25$ است:

۱۹- گزینه ۴

درس‌نامه طول نقطه عطف توابع درجه‌سوم به شکل $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ برابر $-\frac{b}{3a}$ است.

گام ۱ طول نقطه عطف منحنی $y = kx^3 + (k+1)x^2$ ، طبق درس‌نامه برابر $-\frac{k+1}{3k}$ است. می‌خواهیم نقطه عطف در ربع دوم باشد، پس طول آن باید منفی باشد:

$$-\frac{k+1}{3k} < 0 \Rightarrow \frac{k+1}{3k} > 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} \begin{cases} k+1 = 0 \Rightarrow k = -1 \\ 3k = 0 \Rightarrow k = 0 \end{cases}$$

جدول تعیین علامت رسم می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} -1 & 0 & & & \\ \hline + & - & + & + & + \end{array} \xrightarrow{\text{مقادیر مثبت را می‌خواهیم}} (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \quad (I)$$

گام ۲ حالا با جای‌گذاری $x = -\frac{k+1}{3k}$ در منحنی، عرض نقطه عطف را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} y &= kx^3 + (k+1)x^2 \xrightarrow{x = -\frac{k+1}{3k}} y = k(-\frac{k+1}{3k})^3 + (k+1)(-\frac{k+1}{3k})^2 \\ &= -k \times \frac{(k+1)^3}{27k^3} + (k+1) \times \frac{(k+1)^2}{9k^2} = -\frac{(k+1)^3}{27k^2} + \frac{(k+1)^3}{9k^2} \\ &= \frac{-(k+1)^3 + 3(k+1)^3}{27k^2} = \frac{2(k+1)^3}{27k^2} \end{aligned}$$



گام ۳ همان طور که در نمودار ون گام (۱) می بینید، از ۱۵۰ نفر، « ۴۰ + ۷۵ = ۱۱۵ » نفر در قسمت های رنگی هستند. X زمانی حداکثر می شود که همه، « ۱۵۰ - ۱۱۵ = ۳۵ » نفر باقی مانده را به $A \cap B$ اختصاص بدهیم، یعنی $X_{\max} = 35$ است؛ بنابراین بیشترین مقدار $\frac{P(A)}{P(B)}$ برابر می شود با:

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{X + 40}{X + 75} \xrightarrow{X_{\max}=35} \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{35 + 40}{35 + 75} = \frac{75}{110} = \frac{15}{22}$$

مشاوره این اولین باری است که احتمال با تابع ترکیب می شود. این تست پیام می دهد که دیگر نباید چیزی از ریاضی را حذف کنید؛ تست ها دیگر ترکیبی شده اند.

۲۳- گزینه ۳

شفاف سازی منظور طراح از «این روند تا جایی ادامه می یابد که همه اعداد زوج، غیر تکراری و با بیشترین میانگین ممکن باشند». این است که در هر مرحله ای که دو عدد دلخواه را حذف می کنید و به جای آن دو عدد، اختلافشان را می نویسید، نباید هیچ عدد تکراری ای درست شود؛ نداشتن تکراری در مرحله آخر کافی نیست؛ در هیچ مرحله ای نباید تکراری داشته باشیم. در غیر این صورت مسئله جواب منحصر به فردی نخواهد داشت.

درس نامه ۱ اگر میانگین n داده $X_1, X_2, \dots, X_n$ برابر $\bar{X}$ باشد، در این صورت واریانسشان از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\sigma^2 = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n}$$

۲ انحراف معیار، همان جذر واریانس است: واریانس = $\sqrt{\text{انحراف معیار}}$

گام ۴ به گفته سوال، اعداد زیر را در اختیار داریم:

۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹

در هر مرحله باید دوتا عدد را انتخاب کنیم و به جای آن دو، اختلافشان را بنویسیم، به شرطی که:

۱- در هیچ مرحله ای عدد تکراری درست نشود. ۲- در آخر، همه اعداد زوج باشند.

۳- اعداد تا جای ممکن بزرگ ترین باشند تا میانگینشان هم بیشترین شود.

گام ۵ برای برقراری شرط ۲ باید اعداد فرد را حذف کنیم، پس در هر مرحله دو عدد فرد را انتخاب می کنیم و اختلافشان را می نویسیم به طوری که شرط های ۱ و ۳ هم برقرار شوند. طبق شرط ۳ بهتر است در مرحله اول ۹ و ۱۹ را انتخاب کنیم که بیشترین اختلاف را دارند، اما چون اختلاف این دو، عدد تکراری ۱۰ را به وجود می آورد، ۹ و ۱۷ را انتخاب می کنیم و به جای آن ها « ۸ = ۱۷ - ۹ » را می نویسیم:

۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹

به همین ترتیب به جای ۱۱ و ۱۵ عدد ۴ و به جای ۱۳ و ۱۹ هم عدد ۶ را می نویسیم:

۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹
۴، ۶، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۶، ۱۸

پس داده ها به این صورت شدند:

گام ۶ حالا واریانس داده های بالا را به دست می آوریم. برای این کار اول $\bar{X}$ را حساب می کنیم:

$$\bar{X} = \frac{4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18}{8} = \frac{88}{8} = 11$$

حالا به کمک مورد (۱) درس نامه، واریانس را پیدا می کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{(4-11)^2 + (6-11)^2 + (8-11)^2 + \dots + (18-11)^2}{8} = \frac{168}{8} = 21$$

شاید بگویید محاسبات خیلی وقت گیر است، حق دارید! نکته زیر را بخوانید:

نکته اگر n داده، یک دنباله حسابی با قدرنسبت d بسازند، واریانسشان را می توانیم مستقیماً از این رابطه حساب کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{n^2 - 1}{12} d^2$$

اعداد ۴، ۶، ۸، ...، ۱۸ یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۲ می سازند؛ پس طبق نکته بالا می توانستیم

$$\sigma^2 = \frac{8^2 - 1}{12} \times 2^2 = \frac{63}{12} \times 4 = \frac{63}{3} = 21$$

واریانسشان را مستقیماً حساب کنیم:

حالا که فهمیدیم واریانس داده ها ۲۱ است، طبق مورد (۲) درس نامه می توانیم بگوییم انحراف معیار داده ها می شود $\sqrt{21}$.

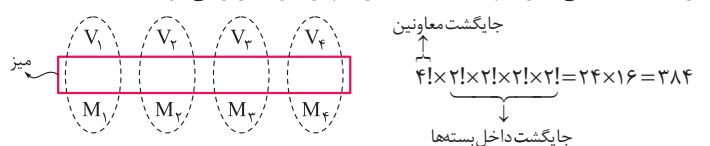
مشاوره سوالات آمار، جدیداً علاوه بر سواد، هوش شما را هم می سنجند. انتظار دیدن چنین سوالاتی را در کنکور خودتان هم داشته باشید.

بنابراین طول نقطه اکسترم این تابع، $x = \frac{1}{16}$ است. با جای گذاری $x = \frac{1}{16}$ در تابع $d(x)$ ، جواب حاصل می شود:

$$d(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times (2x - \sqrt{x} + 2) \\ \Rightarrow d\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(2 \times \frac{1}{16} - \sqrt{\frac{1}{16}} + 2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{15}{8} = \frac{3 \times \sqrt{5}}{8 \times \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{8}$$

۲۱- گزینه ۲

چهار وزیر را V_1, V_2, V_3, V_4 و چهار معاونشان را M_1, M_2, M_3, M_4 در نظر می گیریم. همان طور که در شکل زیر می بینید، ۴ معاون را می توانیم به ۴ طریق در پایین میز بچینیم. با این کار جای هر کدام از وزیران در بالای میز مشخص می شود. هر کدام از بسته های بیضی شکل هم ۲! جایگشت دارند؛ پس جواب برابر می شود با:



اما متأسفانه عدد بالا در گزینه ها نیست و طراح ۳ رو به عنوان گزینه درست انتخاب کرده است!! احتمالاً منظور طراح این بوده که همه وزیران باید در کنار هم و همین طور همه معاون ها هم باید کنار هم بنشینند؛ این جوری دیگر جایگشت

داخل بسته های بیضی شکل بالا را نداریم، بلکه مطابق شکل مقابل، کل بسته وزیران و کل بسته معاونین ۲! جایگشت دارند؛ این جوری به عدد ۴۸ در می رسیم: $4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$

مشاوره متأسفانه در کنکورهای جدید (به خصوص همین کنکور) سوالات پر ابهام و غلط زیاد شده، پس اگر در یک سؤال دیدید هیچ جوره به جواب نمی رسید این احتمال وجود دارد که اصلاً سؤال غلط باشد. در این جور مواقع از سؤال رد شوید.

۲۲- گزینه ۴

استراتژی اول نمودار ون را برای دو مجموعه A و B می کشیم، بعد تعداد اعضای «فقط A » و «فقط B » را در ناحیه مناسب می نویسیم. در ادامه تعداد اعضای ناحیه $A \cap B$ را X در نظر می گیریم تا بتوانیم $\frac{P(A)}{P(B)}$ را بر حسب X بنویسیم. در آخر مقدار X را طوری تنظیم می کنیم که $\frac{P(A)}{P(B)}$ حداکثر شود.

گام ۱ با دو پیشامد A و B طرفیم، پس نمودار ون را به صورت زیر می کشیم. حالا تعداد اعضای ناحیه های مختلف را در نمودار مقابل می نویسیم. به گفته سوال ۴۰ نفر فقط بلیت فیلم «الف» را خریده اند، پس تعداد اعضای ناحیه قرمز رنگ مقابل می شود ۴۰. از طرفی ۷۵ نفر هم فقط بلیت فیلم «ب» را خریداری کرده اند، این یعنی تعداد اعضای ناحیه آبی رنگ مقابل می شود ۷۵.

گام ۲ بایاید فرض کنیم تعداد اعضای $A \cap B$ ، X تا باشد، در این صورت $\frac{P(A)}{P(B)}$ برابر می شود با:

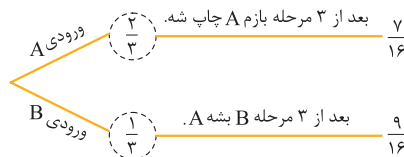
$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{X + 40}{X + 75} \Rightarrow \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{X + 40}{X + 75} \quad (*)$$

نکته هر تابع هموگرافیک مثل $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، دو شاخه دارد. در صورتی که $ad - bc > 0$ باشد، هر دو شاخه اکیداً صعودی و در صورتی که $ad - bc < 0$ باشد، هر دو شاخه اکیداً نزولی هستند.

طبق نکته بالا $y = \frac{X + 40}{X + 75}$ یک تابع هموگرافیک با شاخه های صعودی است، چون $ad - bc = 75 - 40 > 0$ است؛ بنابراین اگر حداکثرش را می خواهیم باید حداکثر X را حساب کنیم.



پس کامل شده نمودار درختی به این صورت شد:



حالا شاخه‌ها را در هم ضرب و اعداد حاصل را با هم جمع می‌کنیم تا $P(A \text{ خروجی})$ پیدا شود:

$$P(A \text{ خروجی}) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{14}{48} + \frac{9}{48} = \frac{23}{48}$$

طبق قانون بیز برای محاسبه $P(A \text{ خروجی} | A \text{ ورودی})$ باید شاخه مطلوب را به احتمال کل تقسیم کنیم. شاخه مطلوب، شاخه‌ای است که حرف ورودی A و خروجی هم A بوده که شاخه اول است و احتمال کل هم که شد $\frac{23}{48}$ ؛ پس:

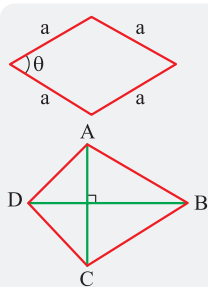
$$P(A \text{ خروجی} | A \text{ ورودی}) = \frac{\frac{14}{48}}{\frac{23}{48}} = \frac{14}{23}$$

مشاوره سؤال واقعاً سختی بود، اگر حلش نکردید نگران نباشید؛ طبیعی است. لطفاً پاسخ این سؤال را خوب بخوانید تا اگر مشابه همچین سؤالی را در کنکور دیدید سورپرایز نشوید.

۲۵ - گزینه ۲

شفاف‌سازی «هر ضلع واسطه هندسی دو قطر لوزی است»؛ یعنی این رابطه برقرار است: ضرب قطرهاى لوزی = $(\text{طول ضلع لوزی})^2$

استراتژی مساحت لوزی را یک بار برحسب زاویه داخلی‌اش و یک بار هم برحسب قطرهاى آن می‌نویسیم و مساوی هم می‌گذاریم.



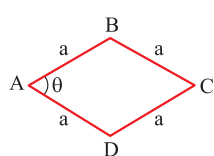
درس‌نامه ۱ مساحت لوزی به ضلع a و زاویه θ برابر است با:

$$S = a^2 \cdot \sin \theta$$

۲ مساحت هر چهارضلعی که قطرهای آن بر هم عمودند (مثل لوزی)، برابر است با نصف حاصل‌ضرب طول قطرهاى آن، مثلاً مساحت چهارضلعی ABCD در شکل مقابل می‌شود:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$

۳ قطرهاى هر لوزی، نیمسازهای زاویه‌های داخلی‌اش هستند.



گام ۱ (نوشتن مساحت لوزی برحسب زاویه داخلی‌اش)

مطابق شکل، زاویه حاده این لوزی را θ و طول ضلعش را a در نظر می‌گیریم، همان‌طور که در قسمت (۱) درس‌نامه گفتیم برای مساحت این لوزی می‌توانیم رابطه زیر را بنویسیم:

$$S_{ABCD} = a^2 \cdot \sin \theta \quad (۱)$$

گام ۲ (نوشتن مساحت لوزی برحسب طول قطرهاى آن)

با توجه به قسمت (۲) درس‌نامه، داریم:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \quad (۲)$$

گام ۳ (پیدا کردن خواسته مسئله)

طبق شفاف‌سازی می‌توانیم بنویسیم:

$$a^2 = AC \cdot BD \Rightarrow a^2 \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$

حالا سمت راست تساوی‌های (۱) و (۲) را مساوی هم می‌گذاریم و به جای $AC \cdot BD$ می‌نویسیم a^2 :

$$a^2 \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} a^2 \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{حاده است}} \theta = 30^\circ$$

با توجه به این که در لوزی، زاویه‌های مجاور، مکمل و قطرهای نیمسازند، شکل دقیق به صورت مقابل می‌شود.

همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، وقتی قطرهای لوزی را بکشیم ۴ مثلث درست می‌شود که کوچک‌ترین زاویه هر کدام 15° است.

شفاف‌سازی «با کدام احتمال حرف «A» چاپ شده توسط دستگاه با حرف ورودی یکسان است»؛ یعنی اگر در آخر حرف «A» چاپ شود، با کدام احتمال حرف ورودی دستگاه هم «A» بوده است؛ پس باید $P(A \text{ خروجی} | A \text{ ورودی})$ را حساب کنیم.

ورودی A باشد به شرطی که خروجی هم A باشد.

درس‌نامه قانون بیز: در فرم شرطی احتمال کل، اول احتمال کل را به کمک نمودار درختی حساب کنید، بعد شاخه مطلوب را به احتمال کل تقسیم کنید.

گام ۱ طبق شفاف‌سازی باید $P(A \text{ خروجی} | A \text{ ورودی})$ را حساب کنیم؛ این یعنی با فرم شرطی احتمال کل طرفیم. اول $P(A \text{ خروجی})$ (همان احتمال کل) را پیدا می‌کنیم.

شروع نمودار درختی به این صورت است:

گام ۲ در دایره توخالی بالا باید احتمال ورودی بودن A و در دایره توخالی پایین باید احتمال ورودی بودن B را بنویسیم. به گفته سؤال احتمال انتخاب حرف A، دو برابر احتمال انتخاب حرف B است؛ این یعنی اگر $P(B) = x$ باشد، $P(A) = 2x$ می‌شود. حالا جمع

دو احتمال را مساوی ۱ می‌گذاریم:

$$x + 2x = 1 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} P(A) = 2x = \frac{2}{3} \\ P(B) = x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

پس قسمت اول نمودار درختی به این صورت می‌شود:

قبل از این که به گام بعدی برویم، بیایید احتمال تغییر و عدم تغییر حرف در هر مرحله را حساب کنیم. به گفته سؤال در هر مرحله حرف ورودی با احتمال $\frac{1}{3}$ بدون تغییر به مرحله بعدی می‌رود؛ پس احتمال تغییر می‌شود $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

گام ۳ حالا شاخه‌های نمودار درختی را ادامه می‌دهیم:

همان‌طور که می‌بینید در شاخه اول می‌خواهیم ورودی A و بعد از سه مرحله خروجی هم A باشد. برای این که چنین اتفاقی بیفتد از این سه مرحله یا باید دو مرحله تغییر داشته باشیم یا اصلاً تغییر نداشته باشیم (صفر بار). چون با دو بار تغییر، یک بار A مان می‌شود و B و با تغییر بعدی باز هم به A می‌رسیم و با صفر بار تغییر هم که A مان دست‌نخورده باقی ماند؛ بنابراین عددی که در شاخه اول باید بنویسیم می‌شود:

$$P_1 = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) + \binom{3}{2} \left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} + \frac{12}{27} = \frac{13}{27}$$

در شاخه دوم هم می‌خواهیم ورودی B را بعد از سه مرحله به A تبدیل کنیم، بنابراین از این ۳ مرحله یا باید ۱ بار تغییر داشته باشیم $(B \rightarrow A)$ یا ۳ بار $(B \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow A)$ ؛ بنابراین عددی که باید در شاخه دوم بنویسیم برابر است با:

$$P_2 = \binom{3}{1} \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) + \binom{3}{3} \left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right) = \left(3 \times \frac{2}{27}\right) + \left(\frac{8}{27}\right) = \frac{6}{27} + \frac{8}{27} = \frac{14}{27}$$



۲۶ - گزینه ۴



استراتژی

اول نشان می‌دهیم دو مثلث ABC و DEF متشابه‌اند، بعد با نوشتن نسبت تشابه این دو مثلث، خواسته سؤال را به دست می‌آوریم.

درس‌نامه ۱

هر زاویه خارجی یک مثلث، برابر است با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاورش؛ مثلاً زاویه خارجی B_1 در شکل مقابل برابر می‌شود با:

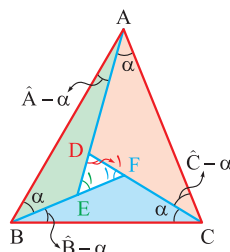
$$\hat{B}_1 = \hat{A} + \hat{C}$$

اگر دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن‌گاه آن دو مثلث با هم متشابه‌اند. مثلاً دو مثلث ABC و $A'B'C'$ ، در شکل‌های مقابل با دو زاویه برابر α و β متشابه‌اند.

برای نوشتن نسبت تشابه دو مثلث، ضلع‌های رو به رو زاویه‌های برابر را در یک نسبت زیر هم می‌نویسیم، به طوری که در صورت، نسبت‌ها اضلاع یک مثلث و در مخرج آن‌ها اضلاع مثلث دیگر قرار داشته باشند. مثلاً نسبت تشابه مثلث‌های ABC و DEC در شکل مقابل برابر می‌شود با:

$$\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DC}$$

روبه α روبه β روبه θ



گام ۱ (اثبات متشابه بودن دو مثلث ABC و DEF):
سؤال گفته سه زاویه ABF ، CAE و BCD هم‌اندازه‌اند. این سه زاویه را با α در شکل مقابل نشان می‌دهیم، حالا می‌توانیم بنویسیم:

$$\hat{BAE} = \hat{A} - \alpha, \hat{FBC} = \hat{B} - \alpha, \hat{ACD} = \hat{C} - \alpha$$

این زاویه‌ها را هم روی شکل می‌نویسیم. حالا خوب به رنگ‌بندی زاویه‌های مثلث DEF و بقیه مثلث‌ها توجه کنید. همان‌طور که می‌بینید زاویه قرمز رنگ ($\hat{D}$) برای مثلث ACD یک زاویه خارجی است، پس می‌توانیم بگوییم برابر می‌شود با جمع زاویه‌های α و $\hat{C} - \alpha$:

$$\hat{D}_1 = (\hat{C} - \alpha) + \alpha = \hat{C}$$

همین‌طور زاویه‌های سبز ($\hat{E}$) و آبی ($\hat{F}$) هم به ترتیب برای مثلث‌های ABE و BCF یک زاویه خارجی هستند؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\hat{E}_1 = (\hat{A} - \alpha) + \alpha = \hat{A}, \hat{F}_1 = (\hat{B} - \alpha) + \alpha = \hat{B}$$

پس شکل مسئله به صورت مقابل می‌شود. همان‌طور که می‌بینید؛ زاویه‌های مثلث‌های ABC و DEF برابر شدند، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه این دو مثلث متشابه‌اند.

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال): الان نوبت نوشتن نسبت تشابه مثلث‌های ABC و DEF است. برای این کار از مورد (۳) درس‌نامه کمک می‌گیریم:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{DF} \xrightarrow{BC=8, EF=3} \frac{AB}{3} = \frac{8}{2/5} \Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{8}{2} \Rightarrow AB = \frac{3 \times 8 \times 2}{5} = \frac{48}{5} = 9 \frac{3}{5}$$

مشاوره شاهد مدل جدیدی از سؤال در مورد تشابه بودیم که حتماً برای خیلی‌ها ناآشنا است و ایده‌ای برای حل آن ندارند؛ بنابراین اگر از پس این سؤال برنیامده‌اید، خیلی نگران نباشید، سعی کنید پاسخ آن را خوب یاد بگیرید تا در مواجهه با سؤال‌های مشابه، غافلگیر نشوید.

۲۷ - گزینه ۱



استراتژی

اول شکل مسئله را رسم می‌کنیم تا کوچک‌ترین مثلثی که درست می‌شود، خودش را نشان دهد؛ بعد با توجه به این که قطر، مساحت مستطیل را نصف می‌کند، خواسته سؤال را به نسبت طول دو پاره‌خط تبدیل می‌کنیم. در آخر این نسبت را به کمک قضیه تالس حساب می‌کنیم.

درس‌نامه ۱ در مثلث مقابل، اگر $DE \parallel BC$ باشد، طبق قضیه تالس می‌توانیم نسبت زیر را بنویسیم:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

(تالس جزء به کل)

۲ با رسم هر قطر یک مستطیل، دو مثلث همنهشت (و در نتیجه هم‌مساحت) ایجاد می‌شود.

گام ۱ (رسم شکل مسئله) شکل مسئله به صورت مقابل است. در این شکل d و d' همان خط‌هایی هستند که قطر AC را به سه قسمت تقسیم می‌کنند. به گفته سؤال قسمت وسط (HH')، دو برابر قسمت‌های کناری (AH و CH') است، پس می‌توانیم فرض کنیم: $AH = CH' = x$, $HH' = 2x$

گام ۲ (تحلیل خواسته سؤال) همان‌طور که در شکل بالا می‌بینید، کوچک‌ترین مثلثی که در مستطیل وجود دارد، مثلث AEH (یا CFH') است؛ پس خواسته سؤال، یعنی نسبت مساحت مستطیل به مساحت کوچک‌ترین مثلث درست‌شده در آن، می‌شود $\frac{S_{ABCD}}{S_{\triangle AEH}}$. طبق مورد (۲) درس‌نامه، مساحت مستطیل، دو برابر مساحت مثلث ABC است؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{\triangle AEH}} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AEH}} = \frac{2(\frac{1}{2} \times BH' \times AC)}{\frac{1}{2} \times EH \times \frac{AH}{x}} = \frac{BH' \times \cancel{AC} \times x}{EH \times \cancel{AH}} = \lambda \times \frac{BH'}{EH} \quad (*)$$

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال) طبق رابطه (*) برای محاسبه خواسته سؤال، باید نسبت $\frac{BH'}{EH}$ را به دست بیاوریم. خوب به مثلث ABH' نگاه کنید. پاره‌خط‌های BH' و EH در این مثلث هر دو بر قطر AC عمودند، پس می‌توانیم بگوییم $BH' \parallel EH$. حالا در مثلث ABH' ، تالس می‌نویسیم:

$$\frac{AH}{AH'} = \frac{EH}{BH'} \Rightarrow \frac{x}{x+2x} = \frac{EH}{BH'} \Rightarrow \frac{EH}{BH'} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BH'}{EH} = 3$$

در آخر تساوی بالا را در رابطه (*) جای گذاری می‌کنیم:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{\triangle AEH}} = \lambda \times \frac{BH'}{EH} = \lambda \times 3 = 24$$

تله حواستان باشد، سؤال گفته خط‌هایی از دو رأس مقابل، نه پاره‌خط‌هایی از دو رأس مقابل. اگر به اشتباه پاره‌خط‌های عمود بر قطر را بکشیم به شکل مقابل می‌رسیم. کوچک‌ترین مثلث درست‌شده در این شکل، مثلث BHC (یا $AH'D$) است. در این حالت اگر خواسته مسئله را حساب کنیم به عدد ۸ می‌رسیم که در ۴ به عنوان تله وجود دارد.

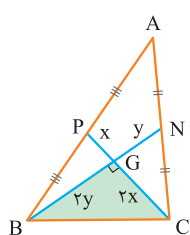
۲۸ - گزینه ۴

درس‌نامه ۱ میانه‌های هر مثلث مطابق شکل مقابل، در نقطه‌ای به نام مرکز ثقل هم‌رس‌اند. میانه‌ها همیشه به نسبت ۱ به ۲ همدیگر را قطع می‌کنند. برای درک بهتر این موضوع شکل مقابل را ببینید:

۲ اگر مثل شکل مقابل، از مرکز ثقل مثلث به رأس‌هایش وصل کنیم، سه مثلث هم‌مساحت درست می‌شود؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$S = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$$

گام ۱ (رسم شکل مناسب و تحلیل آن) شکل مسئله به صورت مقابل است. طبق مورد (۱) درس‌نامه، میانه‌ها به نسبت ۱ به ۲ همدیگر را قطع می‌کنند، پس می‌توانیم طول قطعات ایجادشده روی میانه‌ها را به صورت مقابل روی شکل بنویسیم. محل برخورد میانه‌های BN و CP ، همان مرکز ثقل مثلث (G) است، پس می‌توانیم از خواص هم‌رسی میانه‌ها که در درس‌نامه گفتیم، استفاده کنیم.





گام ۳ (محاسبه مساحت مثلث ABC)

طول سه ضلع مثلث ABC را داریم $a = BC = 7$, $b = AC = 8$, $c = AB = 9$. پس برای محاسبه مساحت، می‌توانیم از رابطه هرون استفاده کنیم (طبق مورد (۱) درس‌نامه).

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+8+9}{2} = 12$$

حالا داریم:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ \Rightarrow S = \sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)} = \sqrt{12 \times 5 \times 4 \times 3} = \sqrt{3^2 \times 4^2 \times 5} = 12\sqrt{5}$$

گام ۴ (محاسبه خواسته سؤال)

حالا که مقدار a , p و S را داریم، می‌توانیم r_a را به کمک رابطه (*) به دست بیاوریم:

$$r_a = \frac{12\sqrt{5}}{12-7} = \frac{12\sqrt{5}}{5} = 2/4\sqrt{5}$$

مشاوره سؤال ترکیبی از فصل‌های اول و سوم کتاب هندسه ۲ که کاملاً قابل حل است. در میان سؤال‌های هندسه پایه، باید بتوانید این مدل سؤال‌ها را شناسایی کرده و اول سراغ آن‌ها بروید.

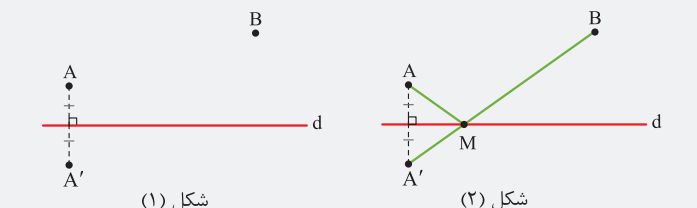
۳۱- گزینه ۲

استراتژی اول ببینید رأس روبه‌روی ضلع ثابت (ضلع به طول ۱۵) کجاها می‌تواند باشد. این جوری متوجه می‌شوید که با نوع خاص مسئله هرون طرف هستید.

درس‌نامه ۱ برای پیدا کردن نقطه‌هایی که از خط d به فاصله R باشند، باید دو خط موازی با d و به فاصله R در دو طرف آن رسم کنیم (Δ , Δ'). هر نقطه‌ای که روی یکی از این خط‌ها باشد (مثل A و B)، فاصله‌اش از خط d برابر R است. نگاه کنید:

مسئله هرون: در این مسئله مطابق شکل مقابل، دو نقطه A و B در یک طرف خط d قرار دارند. می‌خواهیم نقطه‌ای مثل M را روی خط d پیدا کنیم، به طوری که مسیر AMB (همون $AM + MB$) کم‌ترین طول ممکن را داشته باشد. برای پیدا کردن نقطه M کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

الف) نقطه A را نسبت به خط d بازتاب می‌دهیم تا به نقطه A' برسیم. (شکل ۱)
ب) A' را به B وصل می‌کنیم تا d را در نقطه M قطع کند. همان نقطه‌ای است که به دنبالش هستیم.



۳ بعد از پیدا کردن نقطه M در مسئله هرون (شکل مقابل را ببینید)، می‌توانیم بگوییم از بین همه مثلث‌هایی که دو رأس آن‌ها A و B و رأس سومشان روی d قرار دارد، مثلث AMB کم‌ترین محیط را دارد.

۴ حالت خاص مسئله هرون، وقتی اتفاق می‌افتد که AB با خط d موازی باشد (شکل مقابل را ببینید). در چنین حالتی اگر محیط مثلث AMB کم‌ترین باشد، حتماً متساوی‌الساقین است.

گام ۴ (پیدا کردن جای رأس روبه‌روی ضلع ثابت)

سؤال در مورد مثلث‌هایی حرف می‌زند که در ضلع $BC = 15$ مشترک هستند. یکی از این مثلث‌ها را در شکل مقابل ببینید.

به گفته سؤال، مساحت این مثلث 30 واحد مربع است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a \Rightarrow 30 = \frac{1}{2} \times 15 \times h_a \Rightarrow h_a = 4$$

گام ۴ (محاسبه مساحت مثلث GBC): طبق مورد (۲) درس‌نامه، مساحت مثلث GBC ، $\frac{1}{3}$ مساحت مثلث ABC است؛ پس:

$$S_{\Delta GBC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \xrightarrow{S_{\Delta ABC} = 18} S_{\Delta GBC} = 6$$

گام ۵ (محاسبه x , y و خواسته سؤال)

سؤال گفته $CP = 4/5$ و این یعنی: $CG = 2x = 3$. برای پیدا کردن مقدار y ، از مساحت مثلث GBC که در گام قبل به دست آوردیم، استفاده می‌کنیم:

$$S_{\Delta GBC} = \frac{1}{2} BG \cdot CG \xrightarrow{\frac{S_{\Delta GBC}}{GC} = 2} 6 = \frac{1}{2} BG \times 3$$

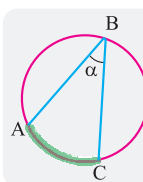
$$\Rightarrow BG = 4 \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow BN = 3y = 6$$

و در نهایت، خواسته سؤال می‌شود:

$$\frac{BN}{CP} = \frac{6}{4/5} = \frac{6}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

۲۹- گزینه ۲

درس‌نامه اندازه هر زاویه محاطی مثل α در شکل مقابل، مساوی نصف اندازه کمان مقابلش است؛ یعنی $\alpha = \frac{1}{2} \widehat{AC}$



همان‌طور که در شکل می‌بینید، پنج ضلعی $ABCDE$ دایره محاط است. به گفته سؤال هر ضلع این ضلعی، وتر رو به یک زاویه محاطی است، مثلاً در شکل مقابل، ضلع AB وتر رو به زاویه محاطی F_1 است، پس طبق درس‌نامه می‌توانیم بگوییم:

به همین ترتیب اگر ضلع‌های BC , CD , DE و EA ، وتر رو به زاویه‌های محاطی F_2 , F_3 , F_4 و F_5 باشند، می‌توانیم بنویسیم:

$$\hat{F}_1 = \frac{1}{2} \widehat{BC}, \hat{F}_2 = \frac{1}{2} \widehat{CD}, \hat{F}_3 = \frac{1}{2} \widehat{DE}, \hat{F}_4 = \frac{1}{2} \widehat{EA}$$

پس مجموع این زاویه‌ها می‌شود:

$$\hat{F}_1 + \hat{F}_2 + \hat{F}_3 + \hat{F}_4 + \hat{F}_5 = \frac{1}{2} \widehat{AB} + \frac{1}{2} \widehat{BC} + \frac{1}{2} \widehat{CD} + \frac{1}{2} \widehat{DE} + \frac{1}{2} \widehat{EA} \\ = \frac{1}{2} (\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DE} + \widehat{EA}) = \frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ$$

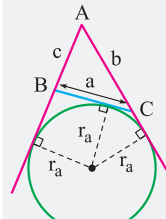
متأسفانه سازمان سنجش پاسخ این سؤال را (۳) اعلام کرده، حالا پرا و چه‌پوری نمی‌روئیم!!!

۳۰- گزینه ۴

استراتژی در واقع سؤال، شعاع یکی از دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC را می‌خواهد، پس باید اول مساحت مثلث را حساب کنیم، برای این کار هم چون طول سه ضلع مثلث را داریم، هرون بهترین انتخاب است.

درس‌نامه ۱ اگر p نصف محیط مثلثی با اضلاع a , b و c باشد، مساحت این مثلث برابر می‌شود با: (رابطه هرون) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

۲ یکی از دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC را در شکل مقابل ببینید. این دایره بر ضلع به طول a و امتداد دو ضلع دیگر مماس است؛ به همین خاطر شعاعش را با r_a نشان می‌دهیم. برای محاسبه r_a از رابطه مقابل استفاده می‌کنیم:



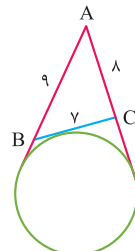
$$r_a = \frac{S}{p-a}$$

گام ۴ (تحلیل شکل مسئله و خواسته سؤال)

همان‌طور که می‌بینید، دایره رسم‌شده در شکل، یکی از دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC است. دایره‌ای که بر ضلع به طول $BC = a = 7$ و امتداد دو ضلع دیگر مثلث مماس است.

طبق مورد (۲) درس‌نامه شعاع این دایره برابر می‌شود با:

$$r_a = \frac{S}{p-a} (*)$$





حالا فرمول طول نیمساز AE را در مثلث ABC می‌نویسیم تا y هم پیدا بشود:
 $AE^2 = AB \cdot AC - BE \cdot CE \Rightarrow 6^2 = 8(8y) - 7(7y)$
 $\Rightarrow 36 = 64y - 49y \Rightarrow 15y = 36 \Rightarrow y = \frac{36}{15} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$
 بنابراین طول AC می‌شود $AC = 8y = 8 \times \frac{12}{5} = \frac{192}{5}$

مشاوره یکی از سخت‌ترین سؤال‌های ریاضی کنکور ۱۴۰۲. اگر نتوانستید به این سؤال پاسخ دهید، اصلاً نگران نباشید؛ پاسخ را خوب بخوانید تا سؤال‌های شبیه به این سؤال را بتوانید حل کنید.

گزینه ۴ - ۳۳

درس‌نامه ۱ دترمینان هر ماتریس 2×2 ، مثل $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

ضرب درایه‌های قطر فرعی
 $|A| = ad - bc$
 ضرب درایه‌های قطر اصلی

۲ در دنیای لگاریتم‌ها، ۴ قانون مهم زیر برقرار است:

(الف) قانون جمع لگاریتم‌ها: $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$

(ب) قانون تفاضل لگاریتم‌ها: $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$

(پ) لگاریتم، توانی را که روی عدد جلوش نشسته باشد، به عنوان ضرب به پشت خودش منتقل می‌کند؛ یعنی: $\log_a b^m = m \log_a b$

(ت) در عبارت‌هایی مثل $a^{\log_b c}$ که در آن‌ها عدد به توان لگاریتم می‌رسد، می‌توانیم جای $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ را عوض کنیم؛ یعنی:

گام ۱ (محاسبه $|A|$)

اول به کمک مورد (۱) درس‌نامه، دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} \log_6 3 & \log_6 2 \\ \log_6 2 & \log_6 3 \end{bmatrix}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$|A| = (\log_6 3)^2 - (\log_6 2)^2 = (\log_6 3 - \log_6 2)(\log_6 3 + \log_6 2)$$

$$= \log_6 3 \times \log_6 6 = \log_6 3$$

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال) سؤال مقدار دترمینان ماتریس $B = \begin{bmatrix} 6^{|A|} & 3^{|A|} \\ 3^{|A|} & 6^{|A|} \end{bmatrix}$ را می‌خواهد که برابر است با:

$$|B| = (6^{|A|} \times 3^{|A|}) - (3^{|A|} \times 6^{|A|}) = 6^{|A|} - 6^{|A|} = 0$$

$$|B| = 6^{\log_6 3} - 6^{\log_6 3} = 6 - 6 = 0$$

$$\log_6 \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \log_6 \frac{27}{8}$$

$$|B| = 6^{\log_6 \frac{27}{8}} - 6^{\log_6 \frac{27}{8}} = \frac{27}{8} - \frac{27}{8} = 0$$

$$|B| = \frac{27}{8} - \frac{27}{8} = 0$$

$$|B| = \frac{27}{8} - \frac{27}{8} = 0$$

در آخر به کمک قانون (ت) درس‌نامه تساوی بالا را ساده می‌کنیم:

$$|B| = \frac{27}{8} - \frac{27}{8} = 0$$

گزینه ۲ - ۳۴

شفاف‌سازی «وتری که از کانون بر محور سهمی عمود است»، همان وتر کانونی سهمی است.

درس‌نامه ۱ همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، فاصله رأس سهمی از کانون و خط هادی یکسان است. به این فاصله، **فاصله کانونی** می‌گوییم و با $|a|$ نشان می‌دهیم.

خط هادی

حالا می‌توانیم بگوییم فاصله نقطه متغیر A از خط ثابت BC، ۴ واحد است، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، نقطه A می‌تواند روی هر کدام از دو خط Δ' یا Δ قرار بگیرد.

گام ۱ (استفاده از حالت خاص مسئله هرون)
 حالا خوب به نقطه A، خط Δ و ضلع BC نگاه کنید. همان‌طور که می‌بینید ضلع BC Δ موازی است و می‌خواهیم نقطه A را روی خط Δ طوری انتخاب کنیم که محیط مثلث ABC کم‌ترین شود. طبق مورد (۴) درس‌نامه (حالت خاص مسئله هرون) در چنین حالتی مثلث ABC

حتماً متساوی‌الساقین است. می‌دانیم در هر مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، میانه هم هست، پس در شکل بالا ارتفاع AH میانه هم هست؛ یعنی: $BH = HC = \frac{15}{2}$

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال)
 مثلث قائم‌الزاویه ABH را در شکل گام قبل ببینید، با استفاده از قضیه فیثاغورس در آن، داریم:

$$b = \sqrt{AH^2 + BH^2} \Rightarrow b = \sqrt{4^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{225}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{64 + 225}{4}} = \sqrt{\frac{289}{4}} = \frac{17}{2} \Rightarrow \Delta ABC = \left(2 \times \frac{17}{2}\right) + 15 = 32$$

(البته اگر دقت کنید اضلاع قائم مثلث قائم‌الزاویه ABH به صورت $15 \times \frac{1}{2}$ و $8 \times \frac{1}{2}$ هستند که آدم را یاد اعداد فیثاغورسی ۸، ۱۵، ۱۷ می‌اندازد؛ پس طول وتر آن می‌شود $17 \times \frac{1}{2}$)

گزینه ۱ - ۳۲

استراتژی اگر در مثلث ABC، نیمساز داخلی AE را رسم کنید، دو مثلث در شکل ایجاد می‌شود که در هر کدام آن‌ها، یک نیمساز داخلی رسم شده، حالا باید از روابط نیمساز در این دو مثلث استفاده کنید.

درس‌نامه نیمساز داخلی هر مثلث، ضلع مقابلش را به نسبت اضلاع کناریش قطع می‌کند؛ این یعنی در شکل مقابل، اگر AD نیمساز باشد؛ داریم:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

برای محاسبه طول این نیمساز هم از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$$

گام ۱ (تحلیل شکل مسئله)
 به گفته سؤال $\widehat{DAC} = 3\alpha$ و $\widehat{BAD} = \alpha$ است، پس می‌توانیم بگوییم $\widehat{BAC} = 4\alpha$ می‌شود.

همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، اگر نیمساز زاویه BAC را رسم کنیم (AE)، یک اتفاق خوب می‌افتد؛ دو مثلث (ABC و ABE) در شکل ایجاد می‌شود که در آن‌ها نیمساز رسم شده است و می‌توانیم از ویژگی‌های نیمساز در این دو مثلث استفاده کنیم.

گام ۲ (استفاده از ویژگی‌های نیمساز در مثلث ABE)
 در مثلث ABE، AD نیمساز است، پس طبق درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{BD}{DE} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{4}{DE} = \frac{8}{AE} \Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow AE = 2x, DE = x$$

حالا به کمک فرمول طول نیمساز در مثلث ABE، x را به دست می‌آوریم:

$$AD^2 = AB \cdot AE - BD \cdot DE \Rightarrow 6^2 = 8(2x) - 4(x) \Rightarrow 36 = 12x \Rightarrow x = 3$$

گام ۳ (استفاده از ویژگی‌های نیمساز در مثلث ABC)
 چیزهایی که در گام قبل به دست آوردیم را روی شکل مقابل می‌نویسیم:

در مثلث ABC، AE نیمساز است؛ پس:

$$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{3+4}{CE} = \frac{8}{AC} \Rightarrow \frac{7}{CE} = \frac{8}{AC} \Rightarrow \frac{AC}{CE} = \frac{8}{7} \Rightarrow \begin{cases} AC = 8y \\ CE = 7y \end{cases}$$



۳۵- گزینه ۳

شفاف سازی «ضرب داخلی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، $-\frac{3}{5}$ حاصل ضرب اندازه‌های دو بردار است؟» یعنی:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{5} |\vec{a}| |\vec{b}|$$

درس نامه ۱ اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، α باشد، در این صورت $\vec{a} \cdot \vec{b}$ و $|\vec{a} \times \vec{b}|$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha, \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$$

زاویه بین دو بردار عددی بین صفر تا 180° است.

۳ مساحت مثلثی که روی بردارهای $\vec{O}$ و $\vec{O}$ ساخته می‌شود، برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{O} \times \vec{O}|$$

۴ دوتا از قوانین مهم ضرب خارجی بردارها را ببینید:

(الف) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ یا $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$

(ب) ضرب خارجی هر بردار در خودش، بردار صفر است؛ یعنی: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

گام ۱ (محاسبه سینوس و کسینوس زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$) طبق شفاف سازی، رابطه کمک مورد (۱) درس نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha = -\frac{3}{5} |\vec{a}| |\vec{b}| \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

حالا به کمک اتحاد $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ می‌توانیم $\sin \alpha$ را هم حساب کنیم:

$$\sin^2 \alpha + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \frac{9}{25} = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

اینجا باید حواسمان باشد که طبق مورد (۲) درس نامه، $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ و در نتیجه $\sin \alpha > 0$ است، پس $\sin \alpha = +\frac{4}{5}$ را انتخاب می‌کنیم.

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال) حالا به کمک مورد (۳) درس نامه مساحت مثلثی را که روی بردارهای $\left(\frac{3\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ و $\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ ساخته می‌شود، به دست می‌آوریم:

$$S = \frac{1}{2} \left| \left(\frac{3\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \times \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \right| = \frac{1}{2} \left| \vec{0} - \frac{6\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} + \frac{2\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - \vec{0} \right|$$

طبق مورد (۴) درس نامه، می‌توانیم به جای $2\vec{b} \times \vec{a}$ بنویسیم $-2\vec{a} \times \vec{b}$:

$$S = \frac{1}{2} \left| -\frac{6\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - \frac{2\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right| = \frac{1}{2} \left| -8 \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right| = 4 \left| \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right| = \frac{4}{5} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

به جای $|\vec{a} \times \vec{b}|$ هم می‌نویسیم $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$:

$$S = 4 \frac{|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = 4 \sin \alpha = 4 \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$$

۳۶- گزینه ۱

درس نامه ۱ معادله گسترده هر دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است. برای به دست آوردن شعاع و مرکز در این معادله، از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$O\left(-\frac{x \text{ ضریب}}{2}, -\frac{y \text{ ضریب}}{2}\right) \quad r = \sqrt{(\text{طول مرکز})^2 + (\text{عرض مرکز})^2} - c$$

عدد ثابت معادله گسترده

فقط حواستان باشد، زمانی می‌توانید از رابطه‌های بالا استفاده کنید که در معادله گسترده ضریب x^2 و y^2 برابر ۱ و عدد ثابت، سمت چپ معادله باشد. اگر معادله گسترده این شکلی نبود، باید چنین شرایطی را خودتان بسازید.

۲ اگر در معادله سهمی x^2 وجود داشته باشد، سهمی قائم و در نتیجه دهانه‌اش یا رو به بالاست یا رو به پایین. در چنین سهمی‌هایی اگر مختصات رأس سهمی به صورت $A(h, k)$ و فاصله کانونی $|a|$ باشد، معادله سهمی مطابق جدول زیر نوشته می‌شود:

شکل	مشخصات	معادله سهمی
	دهانه سهمی رو به بالا	$(x-h)^2 = 4a(y-k)$
	دهانه سهمی رو به پایین	$(x-h)^2 = -4a(y-k)$

۳ مطابق شکل مقابل، اگر از کانون بر محور تقارن سهمی، یک خط عمود بکشیم تا سهمی را در نقاط A و B قطع کند، وترى به طول $4|a|$ درست می‌شود که به آن **وتر کانونی** می‌گوییم.

گام ۱ (تشخیص قائم یا افقی بودن سهمی) همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، سهمی‌ای که مختصات رأسش $S(-1, -1)$ باشد و از نقطه $(1, 1)$ بگذرد، هم می‌تواند افقی و هم می‌تواند قائم باشد.

اینجا ما فرض می‌کنیم سهمی قائم است، پس نمودارش به این صورت می‌شود:

گام ۲ (کامل کردن شکل مسئله و تحلیل آن) طبق خواسته سؤال وتر کانونی MN و همین‌طور عمودهای MH و NH' را به نمودار سهمی اضافه می‌کنیم تا به شکل مقابل برسیم:

حالا می‌توانیم به کمک مورد (۱) و (۳) درس نامه طول قطعات SF, NF, MF و SH'' را برحسب $|a|$ روی شکل بنویسیم.

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال برحسب $|a|$) خواسته سؤال، یعنی طول قطر مستطیل MNH' را می‌توانیم به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث MNH برحسب $|a|$ به دست بیاوریم:

$$NH^2 = MN^2 + MH^2 = (4|a|)^2 + (2|a|)^2 = 16|a|^2 + 4|a|^2 = 20|a|^2 \text{ یا } 20a^2 (*)$$

بنابراین برای محاسبه خواسته سؤال باید a را حساب کنیم.

گام ۴ (محاسبه a و خواسته سؤال) طبق مورد (۲) درس نامه، معادله سهمی‌ای که مختصات رأسش $S(-1, -1)$ و دهانه‌اش رو به بالا باشد، به این صورت است:

$$(x+1)^2 = 4a(y+1)$$

به گفته سؤال سهمی از نقطه $(1, 1)$ می‌گذرد، پس حق داریم این نقطه را در معادله سهمی جای گذاری کنیم:

حالا که a را داریم، می‌توانیم به کمک رابطه $(*)$ ، خواسته سؤال را به دست بیاوریم:

$$NH^2 = 20a^2 = 20 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 20 \times \frac{1}{16} = \frac{5}{2} \Rightarrow NH = \sqrt{\frac{5}{2}}$$



گام ۵ (محاسبه خواسته سؤال) در آخر محل تقاطع دو دایره را طبق مورد (۶) درس نامه در دو مرحله پیدا می کنیم:

♦ **پیدا کردن معادله وتر مشترک دو دایره:** طبق مورد (۵) درس نامه معادله وتر مشترک دایره های $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 2 = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 22 = 0$ به صورت زیر به دست می آید:

$$(x^2 + y^2 - 2x + 6y - 22) - (x^2 + y^2 + 6x - 2y + 2) = 0 \Rightarrow -8x + 8y - 24 = 0 \xrightarrow{+8} -x + y - 3 = 0 \Rightarrow y = x + 3$$

♦ **جای گذاری وتر مشترک در معادله یکی از دایره ها:** حالا $y = x + 3$ را در معادله دایره $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 2 = 0$ جای گذاری می کنیم تا به یک معادله درجه ۲ بر حسب x همان طول نقاط تقاطع است) برسیم:

$$x^2 + (x + 3)^2 + 6x - 2(x + 3) + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + x^2 + 6x + 9 + 6x - 2x - 6 + 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 10x + 5 = 0 \quad (*)$$

★ **نکته** حاصل ضرب ریشه های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به شرطی که $\Delta > 0$ باشد، برابر است با:

سؤال حاصل ضرب طول نقطه های برخورد، یعنی حاصل ضرب جواب های معادله (*) را می خواهد که طبق نکته بالا برابر می شود با:

$$P = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$$

۳۷- گزینه ۲

گام ۵ به قسمت اول صورت سؤال توجه کنید: «با قراردادن عدد سه رقمی $3(a \cdot a)$...» همین جامی توانیم بگوییم ۳ یا ۲ یا ۱. $a > 3$ ، چون به ازای $a > 3$ ، عدد $3(a \cdot a)$ ، چهار رقمی می شود.

گام ۵ سؤال می پرسد حداکثر چند عدد اول می تواند a را بشمارد. در جواب باید بگوییم وقتی $a = 1$ باشد، صفر عدد و وقتی $a = 2, 3$ باشد، ۱ عدد اول a را می شمارد؛ پس جواب عدد ۱ است.

۳۸- گزینه ۳

★ **استراتژی** اول طرفین معادله را به پیمانه ۷۷ همبشت قرار می دهیم تا y حذف شود، بعد با حل معادله همبشتی حاصل، فرم کلی x را به دست می آوریم. در آخر به کمک فرم کلی x ، خواسته مسئله را حساب می کنیم.

♦ **درس نامه ۱** به معادله هایی به شکل $ax + by = c$ ، a و b اعداد صحیح (اند)

معادله سیاله خطی می گوییم. برای حل کردن این معادله ها، کارهای زیر را انجام می دهیم:

الف) طرفین معادله را به پیمانه ضرب کوچک تر (a یا b) همبشت قرار می دهیم تا به یک معادله همبشتی برسیم.

ب) با حل معادله همبشتی، فرم کلی یکی از مجهول ها را به دست می آوریم.

پ) مجهول به دست آمده را در معادله سیاله جای گذاری می کنیم تا مجهول دیگر هم به دست بیاید.

۲ اگر طرفین یک همبشتی به پیمانه m بر عدد صحیحی مثل $a \neq 0$ بخش پذیر باشند، می توانیم a را از طرفین همبشتی ساده کنیم، اما باید حواسمان باشد که پیمانه را هم بر (a, m) تقسیم کنیم، یعنی:

$$\begin{array}{ccc} m & & m \\ ax \equiv ay & \xrightarrow{\div a} & x \equiv y \\ (a, m) = d & & \\ m & & m \end{array}$$

هر همبشتی مثل $a \equiv b$ را می توانیم به یک تساوی تبدیل کنیم، ببینید:

$$a \equiv b \Leftrightarrow a = mk + b$$

گام ۵ در قسمت (۱) درس نامه گفتیم طرفین معادله سیاله را به پیمانه ضرب کوچک تر همبشت قرار دهیم، اما این جا سؤال مجموع ارقام کوچک ترین عدد طبیعی سه رقمی x را می خواهد و اصلاً به y کاری ندارد. پس به جای این که طرفین معادله $63x + 77y = 273$ را به پیمانه ۶۳ همبشت قرار بدهیم، به پیمانه ۷۷ همبشت می گذاریم تا x را به دست بیاوریم:

$$63x + 77y \equiv 273 \xrightarrow{-77y} -14x \equiv 42 \xrightarrow{\div 14} -x \equiv 3 \xrightarrow{\times -1} x \equiv -3$$

گام ۵ طبق مورد (۳) درس نامه، همبشتی بالا را می توانیم به یک تساوی تبدیل کنیم:

$$x = 11k - 3$$

کوچک ترین عدد طبیعی سه رقمی x به ازای $k = 10$ به دست می آید: $x = 11(10) - 3 = 107$ که مجموع ارقامش برابر $1 + 0 + 7 = 8$ است.

۲ اگر خط d مثل شکل مقابل بر دایره $C(O, R)$ مماس باشد، می توانیم بگوییم فاصله مرکز دایره از خط d ، مساوی شعاع دایره است:

$$OH = R$$

۳ معادله دایره به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r به صورت زیر نوشته می شود:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

۴ برای به دست آوردن قرینه یک نقطه نسبت به نیمساز ناحیه اول ($y = x$) باید جای x و y نقطه را عوض کنیم. مثلاً قرینه نقطه $A(3, -5)$ نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم می شود $A'(-5, 3)$.

۵ برای به دست آوردن معادله وتر مشترک دو دایره، کارهای زیر را انجام می دهیم:

الف) چک می کنیم که ضرایب x^2 و y^2 در معادله گسترده شان ۱ باشد (اگر نبود این کار را انجام می دهیم).

ب) طرفین معادله های گسترده را از هم کم می کنیم.

۶ برای به دست آوردن طول نقطه های برخورد دو دایره:

الف) معادله وتر مشترک دو دایره را پیدا می کنیم.

ب) معادله وتر مشترک را به صورت $x + y = \dots$ می نویسیم و در معادله یکی از دایره ها جای گذاری می کنیم. جواب های معادله به دست آمده، طول نقاط برخورد دو دایره هستند. با جای گذاری این جواب ها در معادله وتر مشترک، عرض نقاط تقاطع هم به دست می آیند.

گام ۵ پیدا کردن مرکز دایره کوچک و شعاع دایره ها

اول یک شکل فرضی برای مسئله می کشیم. سؤال معادله دایره کوچک تر را به صورت $x^2 + y^2 + 6x - 2y = r$ داده، پس می توانیم بگوییم مختصات مرکزش می شود:

$$O(-\frac{6}{2}, -\frac{-2}{2}) = (-3, 1)$$

به گفته سؤال خط $y - x = 0$ بر دایره کوچک تر مماس است؛ این یعنی فاصله مرکز دایره کوچک تر $O(-3, 1)$ از خط $y - x = 0$ برابر شعاع دایره است:

$$R = \frac{|1 - (-3)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

از طرفی سؤال می گوید شعاع دایره بزرگ تر، دو برابر شعاع دایره کوچک تر است؛ پس اگر شعاع دایره بزرگ تر را R' در نظر بگیریم، می توانیم بنویسیم:

$$R' = 2R = 2(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$$

گام ۵ (محاسبه r) در گام قبلی دیدیم مرکز دایره $x^2 + y^2 + 6x - 2y = r$ ، نقطه $O(-3, 1)$ و شعاعش $2\sqrt{2}$ شد؛ پس می توانیم به کمک روابط مورد (۱) درس نامه r را حساب کنیم، اما قبلش عدد ثابت معادله، یعنی r را به سمت چپ می بریم تا بتوانیم از آن روابط استفاده کنیم. با این کار معادله دایره به صورت $x^2 + y^2 + 6x - 2y - r = 0$ درمی آید:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(\text{عرض مرکز})^2 + (\text{طول مرکز})^2} \\ \Rightarrow 2\sqrt{2} &= \sqrt{(-3)^2 + 1^2 - (-r)} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 8 = 10 + r \Rightarrow r = -2 \end{aligned}$$

پس معادله دایره کوچک تر به این صورت می شود:

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 2 = 0$$

گام ۵ (نوشتن معادله دایره بزرگ تر) برای نوشتن معادله دایره بزرگ تر، شعاع و مرکزش را لازم داریم. شعاعش را که به دست آوردیم $4\sqrt{2}$ ، پس فقط می ماند مرکزش. خوب به خط $y - x = 0$ و نقطه های O و O' در شکل گام (۱) نگاه کنید. به گفته سؤال، خط $y - x = 0$ که همان نیمساز ناحیه اول و سوم است، عمود منصف OO' است؛ این یعنی اگر نقطه O را نسبت به نیمساز ناحیه اول قرینه کنیم به مختصات نقطه O' می رسیم:

$$O(-3, 1) \xrightarrow[\text{تعویض جای } x \text{ و } y]{\text{قرینه نسبت به } y=x} O'(1, -3)$$

حالا که مرکز و شعاع دایره بزرگ تر را داریم، می توانیم معادله اش را به کمک مورد (۳) درس نامه بنویسیم:

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + (y + 3)^2 &= (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = 32 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 6y - 22 &= 0 \end{aligned}$$



ذره گسیل شده، ${}^A_ZX$ است؛ یعنی این ذره پوزیترون (β^+) است.

❶ **تله** اگر ❶ را انتخاب کردید، سخت در اشتباه هستید، چون نماد پروتون، ${}^1_1p$ است.

گزینه ۳ - ۴۲

❶ **شفاف سازی** گلوله در حداکثر ارتفاع خود از سطح زمین متوقف می شود؛ بنابراین انرژی جنبشی آن در این ارتفاع صفر است.

❷ **درس نامه** ❶ انرژی پتانسیل گرانشی؛ اگر جرمی با جرم m در ارتفاع h نسبت به

سطح زمین قرار بگیرد، آن گاه انرژی پتانسیل گرانشی آن از رابطه زیر به دست می آید (مبدأ

انرژی پتانسیل گرانشی را سطح زمین فرض کردیم):

$$\begin{array}{l} \text{ارتفاع (m)} \rightarrow \text{جرم (kg)} \\ \uparrow \\ U = mgh \\ \downarrow \\ \text{شتاب گرانش (m/s}^2\text{)} \end{array}$$

❷ انرژی جنبشی جسمی که با تندی v در حال حرکت است:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow \text{جرم (kg)}$$

❸ **انرژی مکانیکی**: به مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل جسم، انرژی مکانیکی می گوئیم.

انرژی پتانسیل (J)

$$E = K + U$$

انرژی جنبشی (J)

اگر از نیروهای اتلافی (مثل نیروی مقاومت هوا) صرف نظر کنیم، انرژی مکانیکی جسم

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

پایسته می ماند:

❸ **مقاومت هوا** ناچیز است؛ پس انرژی مکانیکی گلوله پایسته است؛ بنابراین می توانیم

بنویسیم (در تمام مراحل مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی را سطح زمین در نظر گرفتیم):

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\xrightarrow{U_1=0} K_1 = 0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + U_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = U_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} \times v_1^2 = mgh_2 \xrightarrow{h_2=42 \text{ m}} \frac{1}{2} \times v_1^2 = 10 \times 42 \Rightarrow v_1^2 = 2800$$

❸ **حداکثر ارتفاع** گلوله از سطح زمین هنگامی است که تندی آن در آن ارتفاع صفر

شود؛ در نتیجه انرژی جنبشی آن نیز در این ارتفاع صفر است ($K_2 = 0$)؛ بنابراین با استفاده از

پایستگی انرژی مکانیکی می توانیم بنویسیم:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\xrightarrow{U_1=0} K_1 = U_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2$$

$$\xrightarrow{v_1^2=2800} \frac{1}{2} \times 2800 = 10 \times h_2 \Rightarrow h_2 = 140 \text{ m}$$

گزینه ۲ - ۴۳

❷ **درس نامه** انبساط طولی یک جسم جامد:

ضریب انبساط طولی ($1/K$ یا $1/^\circ\text{C}$)

$$\begin{array}{l} \uparrow \\ \Delta L = \alpha L_0 \Delta \theta \\ \leftarrow \text{تغییرات دما (}^\circ\text{C یا K)} \rightarrow \end{array}$$

با جای گذاری داده ها در رابطه زیر، اختلاف بیشترین و کمترین دمای پل را به دست می آوریم:

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta \theta \xrightarrow{\alpha=1/25 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}} \Delta L = 900/9 - 900 = 0/9 \text{ m} \Rightarrow \Delta \theta = 1/25 \times 10^{-5} \times 0/9 \times 250000$$

$$\Rightarrow \Delta \theta = 10^\circ \text{C}$$

گزینه ۱ - ۴۴

❷ **درس نامه** قانون اول ترمودینامیک:

$$\begin{array}{l} \uparrow \\ \Delta U = Q + W \\ \downarrow \\ \text{کار محیط بر روی دستگاه (گاز)} \end{array}$$

گزینه ۳ - ۳۹

متأسفانه این سؤال غلط است، چون بی شمار زوج مرتب به فرم $(\delta k + 1, \delta k)$ و $(\delta k + 2, \delta k - 1)$ داریم که نه مجموع مؤلفه های اولشان مضرب ۵ است؛ نه مجموع مؤلفه های دومشان.

گزینه ۴ - ۴۰

❷ **درس نامه** ❶ هر وقت درجه رأس های یک گراف را داشتید و اندازه گراف را

می خواستید، از رابطه مقابل استفاده کنید: تعداد یال ها $\times 2 =$ مجموع درجه رأس ها

❷ بزرگ ترین عدد در بین درجه رأس های گراف $\Delta(G) = G$

❸ فرض کنید G یک گراف از مرتبه p و a یک رأس آن باشد، در این صورت بین درجه رأس a در G و $\bar{G}$ رابطه زیر برقرار است:

$$p - 1 = \text{درجه رأس } a \text{ در } \bar{G} + \text{درجه رأس } a \text{ در } G$$

❹ تعداد رأس های فرد هر گراف، همیشه عددی زوج است.

❸ **گام اول** ۴۸ را تجزیه می کنیم:

۴۸ = ۲ × ۲ × ۲ × ۲ × ۳

۲، ۲، ۲، ۲، ۳ نمی تواند درجه رئوس یک گراف باشد، چون تعداد رأس های فردش، عددی

زوج نیست (به دونه فرد دراره)، پس حق داریم به دونه ۱ به اعداد بالا اضافه کنیم؛ این جوری هم

تعداد یک ها حداقل است هم تعداد رأس های فرد، زوج: ۳، ۲، ۲، ۲، ۲، ۱: درجه رأس ها

❸ با کمی دقت به درجه های بالا متوجه می شویم که می توانیم دوتا از ۲ ها را در هم

ضرب کنیم و به جایشان ۴ را قرار بدهیم تا درجه رأس ها به صورت ۴، ۳، ۲، ۲، ۱ دربیاید؛

این دنباله هم مشکلی ندارد.

❸ **گام دوم** $\Delta(\bar{G})$ و $q(\bar{G})$ را در هر دو دنباله به دست می آوریم:

❖ در این دنباله چون ۶ تا عدد داریم، پس ۶ تا هم رأس داریم؛ بنابراین

$p = 6$ است. حالا طبق مورد (۳) درس نامه می توانیم بگوییم برای به دست آوردن درجه

رأس های گراف $\bar{G}$ ، باید همه درجه ها را از $p - 1 = 5$ کم کنیم:

$$\bar{G} \text{ درجه رأس های } \bar{G}: 5 - 3 = 2, 5 - 2 = 3, 5 - 2 = 3, 5 - 2 = 3, 5 - 2 = 3, 5 - 1 = 4$$

همان طور که می بینید $\Delta(\bar{G}) = 4$ است. برای محاسبه $q(\bar{G})$ هم از مورد (۱) درس نامه

کمک می گیریم:

$$\text{اندازه گراف } \bar{G} \times 2 = \text{مجموع درجه های گراف } \bar{G} \Rightarrow 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4 = 2q(\bar{G}) \Rightarrow 18 = 2q(\bar{G}) \Rightarrow q(\bar{G}) = 9$$

بنابراین $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 4 + 9 = 13$ است. همین جا معلوم می شود که ❹ درست است،

اما اگر بررسی دنباله دوم را هم می خواهید، خدمت شما:

❖ در این دنباله $p = 5$ است، پس برای محاسبه درجه رأس های گراف $\bar{G}$

باید همه درجه ها را از $p - 1 = 4$ کم کنیم:

$$\bar{G} \text{ درجه رأس های } \bar{G}: 4 - 3 = 1, 4 - 2 = 2, 4 - 2 = 2, 4 - 2 = 2, 4 - 1 = 3$$

در این دنباله $\Delta(\bar{G}) = 3$ است. $q(\bar{G})$ هم به صورت زیر پیدا می شود:

$$1 + 0 + 2 + 2 + 3 = 2q(\bar{G}) \Rightarrow 8 = 2q(\bar{G}) \Rightarrow q(\bar{G}) = 4$$

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$ می شود که در گزینه ها نیست.

فیزیک

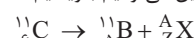
گزینه ۲ - ۴۱

❶ **استراتژی** در مسائل واپاشی، عدد جرمی قبل از فرایند را با مجموع عددهای جرمی

پس از فرایند و همچنین عدد اتمی قبل از فرایند را با مجموع عددهای اتمی پس از فرایند

برابر قرار بدهید و مجهول را پیدا کنید.

تعداد نوکلئون ها در طی فرایند واپاشی هسته ای پایسته است؛ بنابراین می توانیم بنویسیم:



$$11 = 11 + A \Rightarrow A = 0$$

$${}^0_{+1}\text{e} \Rightarrow X$$

$$6 = 5 + Z \Rightarrow Z = 1$$



$$x_B = \frac{1}{2} a_B t_B^2 + v_{0B} t_B + x_{0B}$$

$$\frac{a_B = a + \frac{0}{\Delta} = \frac{0}{\frac{1}{2} \text{ s}} = 0 \text{ m/s}^2}{v_{0B} = 0 \text{ m/s}, t_B = 1 \text{ s}} \rightarrow x_B = \frac{1}{2} (0) (1)^2 + x_{0B} = 2 \text{ m} + x_{0B} \text{ (m)}$$

گام ۳ حالا فاصله دو متحرک یعنی $x_B - x_A$ را به دست می آوریم:

$$B \text{ و } A \text{ متحرک } : x_B - x_A = 2 \text{ m} + x_{0B} - (2 \text{ m} + x_{0A})$$

$$\frac{x_{0B} = x_{0A}}{\rightarrow} \text{ فاصله دو متحرک } A \text{ و } B :$$

$$x_B - x_A = 2 \text{ m} + x_{0B} - 2 \text{ m} - x_{0A} = 0 \text{ m}$$

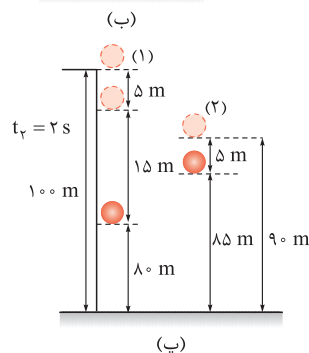
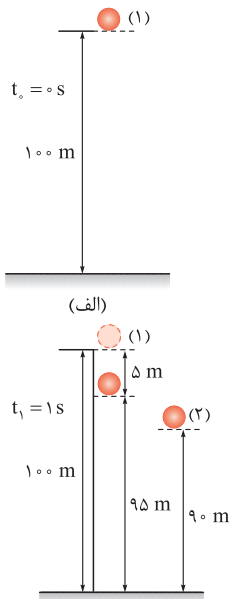
۴۶ - گزینه ۴

درس نامه جابه جایی در ثانیه m در سقوط آزاد بدون سرعت اولیه (جهت مثبت y را رو به پایین فرض کردیم):

$$\Delta y = (n - 0) g$$

در رابطه بالا، اگر $g = 10 \text{ m/s}^2$ باشد، متحرک در ثانیه های اول، دوم، سوم و ... به ترتیب به اندازه 5 m ، 15 m ، 25 m و ... جابه جا می شود.

گلوله (۱) در لحظه $t_0 = 0 \text{ s}$ از فاصله 100 m تری زمین رها می شود (شکل الف).



یک ثانیه بعد ($t_1 = 1 \text{ s}$)، گلوله (۲) از فاصله 90 m تری زمین (10 m پایین تر از مکان اولیه گلوله اول) رها می شود. در این یک ثانیه گلوله اول به اندازه 5 m پایین آمده و به فاصله 95 m تری زمین رسیده است (شکل ب).

یک ثانیه بعد ($t_2 = 2 \text{ s}$)، گلوله اول به اندازه 15 m و گلوله دوم به اندازه 5 m به سمت پایین می آیند و به ترتیب در فاصله 80 m تری و 85 m تری زمین قرار می گیرند (شکل پ).

همان طور که در شکل های (ب) و (پ) می بینید، از لحظه رها شدن گلوله (۲) (شکل ب) تا لحظه ای که گلوله (۱) به زمین می رسد، فاصله دو گلوله ابتدا کاهش می یابد، سپس افزایش می یابد.

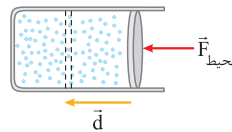
۴۷ - گزینه ۲

درس نامه ۱ معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست:

$$\begin{aligned} \text{شتاب (m/s}^2\text{)} & \uparrow \\ v &= at + v_0 \\ \text{سرعت اولیه (m/s)} & \downarrow \end{aligned}$$

۲ معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت بر روی خط راست:

$$\begin{aligned} \text{سرعت (m/s)} & \uparrow \\ x &= vt + x_0 \\ \text{مکان اولیه (m)} & \downarrow \end{aligned}$$



شکل روبه رو، یک فرایند تراکمی را نشان می دهد. با توجه به شکل روبه رو، کاری که محیط بر روی گاز در فرایندهای تراکمی انجام می دهد، مثبت است.

$$W_{\text{محیط بر روی گاز}} = F_{\text{محیط}} d \cos \theta \xrightarrow{\theta = 0^\circ} W_{\text{محیط بر روی گاز}} > 0$$

۳ و ۴ پُر!

حالا باید تغییر انرژی درونی گاز را در فرایندهای تراکم هم فشار و تراکم بی دررو بررسی کنیم. **تراکم بی دررو:** در فرایند بی دررو، گرمایی بین گاز و محیط مبادله نمی شود ($Q = 0$)؛ بنابراین طبق قانون اول ترمودینامیک، انرژی درونی گاز در فرایند تراکم بی دررو افزایش می یابد (در واقع گاز در این فرایند از محیط انرژی می گیرد، اما نه به صورت گرما، بلکه از طریق کاری که محیط بر روی آن انجام می دهد).

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{Q=0, W>0} \Delta U > 0$$

۲ پُر پُر!

گزینه درست معلوم شد! اما تنبلی نکن! بیا بیین چرا درست!

تراکم هم فشار: فشار گاز در طی فرایند هم فشار ثابت است و گرما و کار هر دو مبادله می شوند. گاز در فرایند تراکم هم فشار، مقداری انرژی از طریق کاری که محیط بر روی آن انجام می دهد، دریافت می کند و مقداری انرژی از طریق گرما از دست می دهد. برای این که فشار گاز ثابت بماند، باید گرمایی که گاز از دست می دهد، بیشتر از کاری که محیط بر روی آن انجام می دهد باشد. بنابراین طبق قانون اول ترمودینامیک، انرژی درونی گاز در فرایند تراکم هم فشار کاهش می یابد.

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{Q < 0, W > 0} \Delta U < 0$$

۴۵ - گزینه ۲

شفاف سازی متحرک B ، 2 s دیرتر از متحرک A به حرکت درآمده است، پس اگر مدت زمان t برای متحرک A بگذرد، برای متحرک B مدت زمان $t - 2$ سپری می شود.

درس نامه معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست:

$$\begin{aligned} \text{مکان اولیه (m)} & \uparrow \\ x &= \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 \\ \text{شتاب (m/s}^2\text{)} & \uparrow \\ \text{سرعت اولیه (m/s)} & \downarrow \\ \text{زمان (s)} & \downarrow \end{aligned}$$

گام ۱ متحرک های A و B از یک نقطه ($x_{0A} = x_{0B}$) با شتاب ثابت شروع به حرکت کرده اند، اما متحرک B ، 2 s دیرتر از متحرک A پس وقتی که 6 s از حرکت متحرک A می گذرد، متحرک B ، 4 s در حرکت بوده است. طبق گفته سؤال، 6 s پس از حرکت متحرک A ، دو متحرک به هم می رسند؛ پس مکان دو متحرک در این لحظه یکسان است و با استفاده از معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت این دو متحرک می توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} x_A = \frac{1}{2} a_A t_A^2 + v_{0A} t_A + x_{0A} \xrightarrow{v_{0A} = 0 \text{ m/s}} x_A = \frac{1}{2} a_A t_A^2 + x_{0A} \\ x_B = \frac{1}{2} a_B t_B^2 + v_{0B} t_B + x_{0B} \xrightarrow{v_{0B} = 0 \text{ m/s}} x_B = \frac{1}{2} a_B t_B^2 + x_{0B} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x_A = x_B, x_{0A} = x_{0B}} \cancel{\frac{1}{2} a_A t_A^2} + \cancel{x_{0A}} = \cancel{\frac{1}{2} a_B t_B^2} + \cancel{x_{0B}}$$

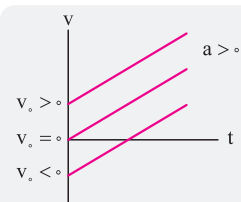
$$\frac{a_A = a, a_B = a + \frac{0}{\Delta} \text{ (m/s}^2\text{)}}{t_A = 6 \text{ s}, t_B = 4 \text{ s}} \rightarrow a (6)^2 = (a + \frac{0}{\Delta}) (4)^2$$

$$\Rightarrow 9a = 4a + 2 \Rightarrow 5a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{5} \text{ m/s}^2 = 0.4 \text{ m/s}^2$$

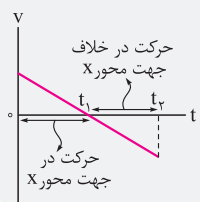
گام ۳ سؤال از ما فاصله دو متحرک را در لحظه ای که 10 s از حرکت متحرک A می گذرد، می خواهد. با توجه به این که متحرک B ، 2 s دیرتر از متحرک A به حرکت درآمده است، پس برای متحرک B تا این لحظه، 8 s سپری شده است. مکان هر یک از متحرک ها در این لحظه را محاسبه می کنیم:

$$x_A = \frac{1}{2} a_A t_A^2 + v_{0A} t_A + x_{0A}$$

$$\frac{a_A = a = 0.4 \text{ m/s}^2, v_{0A} = 0 \text{ m/s}}{t_A = 10 \text{ s}} \rightarrow x_A = \frac{1}{2} (0.4) (10)^2 + x_{0A} = 20 + x_{0A} \text{ (m)}$$



۲ نمودار سرعت - زمان متحرکی که با شتاب ثابت بر روی خط راست حرکت می‌کند، به صورت یک خط راست است.



۳ در نمودار سرعت - زمان
 $v > 0$ متحرک در جهت محور X حرکت می‌کند.
 $v < 0$ متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند.

ابتدا اطلاعاتمان را راجع به دو متحرک A و B کامل می‌کنیم. نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B به صورت یک خط راست است؛ پس حرکت این دو متحرک از نوع حرکت با شتاب ثابت است. با توجه به نمودار سرعت - زمان آن‌ها، شتاب متحرک B را محاسبه می‌کنیم:

$$a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow a_B = \frac{0 - (-16)}{8 - 0} = 2 \text{ m/s}^2$$

حالا که شتاب متحرک B را حساب کردیم، معادله سرعت - زمان آن را نیز می‌نویسیم:

$$v_B = a_B t + v_{0B} \xrightarrow{a_B = 2 \text{ m/s}^2, v_{0B} = -16 \text{ m/s}} v_B = 2t - 16$$

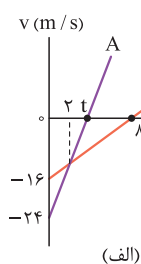
معادله سرعت - زمان متحرک A را نیز می‌نویسیم:

$$v_A = a_A t + v_{0A} \xrightarrow{v_{0A} = -24 \text{ m/s}} v_A = a_A t - 24$$

نمودار سرعت - زمان این دو متحرک را ببینید. سرعت دو متحرک A و B در لحظه $t = 2 \text{ s}$ با هم برابر شده است ($v_A = v_B$). بنابراین با استفاده از معادله سرعت - زمان آن‌ها می‌توانیم بنویسیم:

$$v_A = v_B \xrightarrow{v_A = a_A t - 24, v_B = 2t - 16} a_A t - 24 = 2t - 16$$

$$\xrightarrow{t=2 \text{ s}} 2a_A - 24 = 2(2) - 16 \Rightarrow 2a_A = 12 \Rightarrow a_A = 6 \text{ m/s}^2$$



شتاب متحرک A را هم پیدا کردیم. حالا به سراغ سؤال می‌رویم! سؤال راجع به بازه زمانی است که دو متحرک A و B در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند؛ پس باید این بازه زمانی را پیدا کنیم. با توجه به شکل (الف)، سرعت متحرک A در لحظه t صفر می‌شود و متحرک A در این لحظه تغییر جهت داده و در جهت محور X به حرکت خود ادامه می‌دهد. با استفاده از معادله سرعت - زمان متحرک A، لحظه t را به دست می‌آوریم:

$$v_A = 6t - 24 \xrightarrow{v_A = 0 \text{ m/s}} 0 = 6t - 24 \Rightarrow t = 4 \text{ s}$$

همان‌طور که در نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B می‌بینید، در بازه زمانی $t = 4 \text{ s}$ تا $t' = 8 \text{ s}$ متحرک A در جهت محور X و متحرک B در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند، پس در این بازه زمانی این دو متحرک در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند. حالا برای این که ببینیم فاصله این دو متحرک در این بازه زمانی چگونه تغییر می‌کند، ابتدا مکان هر یک از آن‌ها را در لحظه $t = 4 \text{ s}$ با استفاده از معادله مکان - زمان آن‌ها به دست می‌آوریم:

$$x_A = \frac{1}{2} a_A t^2 + v_{0A} t + x_{0A}$$

$$\xrightarrow{a_A = 6 \text{ m/s}^2, x_{0A} = 0 \text{ m}, v_{0A} = -24 \text{ m/s}} x_A = \frac{1}{2} (6) t^2 - 24t + 0 = 3t^2 - 24t$$

$$\xrightarrow{t=4 \text{ s}} x_A = 3(4)^2 - 24(4) = 48 - 96 = -48 \text{ m}$$

$$x_B = \frac{1}{2} a_B t^2 + v_{0B} t + x_{0B}$$

$$\xrightarrow{a_B = 2 \text{ m/s}^2, x_{0B} = 0 \text{ m}, v_{0B} = -16 \text{ m/s}} x_B = \frac{1}{2} (2) t^2 - 16t + 0 = t^2 - 16t$$

$$\xrightarrow{t=4 \text{ s}} x_B = (4)^2 - 16(4) = 16 - 64 = -48 \text{ m}$$

در ابتدا هر دو خودرو با سرعت ثابت در حال حرکت هستند. وقتی فاصله بین دو خودرو به 46 m می‌رسد، نوع حرکت خودروی A تغییر می‌کند و با شتاب ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد و خودروی B یک ثانیه پس از خودروی A نوع حرکتش تغییر می‌کند و با شتاب ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد؛ بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که در این یک ثانیه، خودروی A با شتاب ثابت و خودروی B با سرعت ثابت در حال حرکت‌اند.

با توجه به شکل (الف)، مکان هر یک از خودروها در لحظه $t = 1 \text{ s}$ را با استفاده از معادله مکان - زمان آن‌ها به دست می‌آوریم:

$$x_A = \frac{1}{2} a_A t^2 + v_{0A} t + x_{0A}$$

$$\xrightarrow{a_A = -2 \text{ m/s}^2, v_{0A} = 8 \text{ m/s}, x_{0A} = 46 \text{ m}} x_A = \frac{1}{2} (-2) t^2 + 8t + 46 = -t^2 + 8t + 46$$

$$\xrightarrow{t=1 \text{ s}} x_A = -(1)^2 + 8(1) + 46 = 53 \text{ m}$$

$$x_B = v_B t + x_{0B} \xrightarrow{v_B = 20 \text{ m/s}, x_{0B} = 0 \text{ m}} x_B = 20t \xrightarrow{t=1 \text{ s}} x_B = 20(1) = 20 \text{ m}$$

از این لحظه ($t = 1 \text{ s}$) به بعد،

خودروی B با شتاب ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. پس با توجه به شکل (ب)، معادله مکان - زمان خودروی B پس از لحظه $t = 1 \text{ s}$ را می‌نویسیم:

$$x'_B = \frac{1}{2} a_B t'^2 + v_{0B} t' + x'_{0B}$$

$$\xrightarrow{a_B = -4 \text{ m/s}^2, v_{0B} = 20 \text{ m/s}, x'_{0B} = 20 \text{ m}} x'_B = \frac{1}{2} (-4) t'^2 + 20t' + 20$$

$$= -2t'^2 + 20t' + 20$$

برای این که معادله مکان - زمان خودروی A پس از لحظه $t = 1 \text{ s}$ را بنویسیم، به سرعت آن در این لحظه نیاز داریم (پهن سرعت اولیه/ش می‌شه). با استفاده از معادله سرعت - زمان، سرعت خودروی A در لحظه $t = 1 \text{ s}$ را به دست می‌آوریم:

$$v_A = a_A t + v_{0A} \xrightarrow{a_A = -2 \text{ m/s}^2, v_{0A} = 8 \text{ m/s}, t=1 \text{ s}} v_A = -2(1) + 8 = 6 \text{ m/s}$$

حالا با توجه به شکل (ب)، می‌توانیم معادله مکان - زمان خودروی A پس از لحظه $t = 1 \text{ s}$ را بنویسیم:

$$x'_A = \frac{1}{2} a_A t'^2 + v'_{0A} t' + x'_{0A}$$

$$\xrightarrow{a_A = -2 \text{ m/s}^2, v'_{0A} = 6 \text{ m/s}, x'_{0A} = 53 \text{ m}} x'_A = \frac{1}{2} (-2) t'^2 + 6t' + 53 = -t'^2 + 6t' + 53$$

وقتی دو خودروی A و B به هم می‌رسند، مکان آن‌ها یکسان است ($x'_A = x'_B$)؛ پس معادله مکان - زمان دو خودرو را برابر با یکدیگر قرار می‌دهیم تا لحظه به هم رسیدن را به دست بیاوریم:

$$x'_A = x'_B \Rightarrow -t'^2 + 6t' + 53 = -2t'^2 + 20t' + 20 \Rightarrow t'^2 - 14t' + 33 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t' = 11 \text{ s} \quad \times \\ t' = 3 \text{ s} \quad \checkmark \end{cases}$$

دو خودروی A و B قبل از لحظه $t' = 11 \text{ s}$ متوقف می‌شوند، به خاطر همین $t' = 11 \text{ s}$ غیر قابل قبول است. در آخر خواسته سؤال یعنی سرعت خودروی B در لحظه $t' = 3 \text{ s}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$v_B = a_B t' + v_{0B} \xrightarrow{a_B = -4 \text{ m/s}^2, t' = 3 \text{ s}, v_{0B} = 20 \text{ m/s}} v_B = -4(3) + 20 = 8 \text{ m/s}$$

۴۸ - گزینه ۳

درس‌نامه ۱ اگر سرعت متحرکی در لحظه t_1 برابر v_1 و در لحظه t_2 برابر v_2 باشد، آن‌گاه شتاب متوسط آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

↑ تغییرات سرعت (m/s)
↓ مدت زمان (s)



گزینه ۳ - ۵۱

۱. **درس نامه** نیروی اصطکاک جنبشی؛ ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح

$$f_k = \mu_k F_N$$

نیروی عمودی سطح (N)

۲. اندازه نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند (R)، برابر با برآیند دو نیروی عمودی سطح (F_N) و نیروی اصطکاک (f) است.

$$R = \sqrt{F_N^2 + f^2}$$

در رابطه بالا، f می‌تواند f_s یا f_k باشد.

۳. **قانون دوم نیوتون**؛ جرم (kg) شتاب (m/s^2)

$$F_{net} = ma$$

نیروی خالص (N)

۴. وقتی جسم حرکت می‌کند، نیروی اصطکاک جنبشی بر آن وارد می‌شود. در این حالت با استفاده از قانون دوم نیوتون می‌توانیم شتاب جسم در حین حرکت را به دست بیاوریم:

$$F_N = mg = 50 \text{ N} \quad F_{net} = ma \Rightarrow F - f_k = ma$$

$$f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg \Rightarrow F - \mu_k mg = ma$$

$$m = 5 \text{ kg}, g = 10 \text{ m/s}^2 \quad F = 26 \text{ N}, \mu_k = 0.4 \Rightarrow 26 - 0.4 \times 5 \times 10 = 5a$$

$$\Rightarrow 6 = 5a \Rightarrow a = \frac{6}{5} = 1.2 \text{ m/s}^2$$

۵. در حین حرکت، سطح به جسم نیروی عمودی سطح (F_N) و نیروی اصطکاک جنبشی (f_k) را وارد می‌کند؛ بنابراین نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند، برآیند این دو نیرو است:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_k^2} \quad \begin{matrix} F_N = mg = 50 \text{ N} \\ f_k = \mu_k F_N = 0.4 \times 50 = 20 \text{ N} \end{matrix} \Rightarrow R = \sqrt{50^2 + 20^2}$$

$$= \sqrt{2900} = 10\sqrt{29} \text{ N}$$

۶. **تله** اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح را ۰/۵ در نظر بگیرد، به گزینه نادرست ۲ می‌رسید.

گزینه ۲ - ۵۲

۱. **درس نامه** نیروی مرکزگرا در حرکت دایره‌ای یکنواخت؛

$$F_C = \frac{mv^2}{r}$$

در حرکت دایره‌ای یکنواخت خودرو بر روی سطح افقی، نیروی اصطکاک ایستایی، نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند. با جای‌گذاری داده‌ها در رابطه زیر، اندازه این نیرو را به دست می‌آوریم:

$$F_C = \frac{mv^2}{r} \quad \begin{matrix} m = 2 \times 10^3 \text{ kg}, r = 20 \text{ m} \\ v = 18 \times \frac{10}{36} = 5 \text{ m/s} \end{matrix} \Rightarrow F_C = \frac{2 \times 10^3 \times 5^2}{20} = 2500 \text{ N}$$

گزینه ۳ - ۵۳

۱. **شفاف‌سازی** در طول تار ۳ شکم تشکیل شده، یعنی شماره هماهنگ ۳ است.

۲. **درس نامه** ۱. برای محاسبه بسامد تشدید هماهنگ Δm (f_n) با استفاده از بسامد تشدید اصلی (f_1) در تار مرتعش دو انتها بسته، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$f_n = nf_1$$

تعداد شکم در طول تار مرتعش دو انتها بسته برابر با شماره هماهنگ (n) است.

۲. **بسامد تشدید هماهنگ Δm در تار مرتعش دو انتها بسته**

تندی انتشار (m/s) ← شماره هماهنگ

$$f_n = \frac{nv}{2L}$$

طول تار (m)

در شکل (ب)، موقعیت این دو متحرک در لحظه $t = 4 \text{ s}$ را بر روی محور X نشان دادیم. همان‌طور که می‌بینید، متحرک B در مکان -48 m و در حال حرکت در خلاف جهت محور X و متحرک A در مکان -48 m تغییر جهت داده و در جهت محور X شروع به حرکت می‌کند. حالا مکان دو متحرک A و B را در لحظه $t' = 8 \text{ s}$ به دست می‌آوریم:

$$x_A = 3t^2 - 24t \xrightarrow{t'=8 \text{ s}} x'_A = 3(8)^2 - 24(8) = 192 - 192 = 0 \text{ m}$$

$$x_B = t^2 - 16t \xrightarrow{t'=8 \text{ s}} x'_B = (8)^2 - 16(8) = 64 - 128 = -64 \text{ m}$$

در شکل (پ) موقعیت این دو متحرک در لحظه $t' = 8 \text{ s}$ را بر روی محور X نشان دادیم. همان‌طور که می‌بینید، در بازه زمانی ۴ s تا ۸ s متحرک A از مکان -48 m به مکان 0 m و متحرک B از مکان -48 m به مکان -64 m جابه‌جا شده‌اند.

با توجه به شکل (پ)، متحرک A، 48 m در جهت محور X و متحرک B، 16 m در خلاف جهت محور X در این بازه زمانی جابه‌جا شده‌اند. پس در مجموع 64 m ($48 + 16$) از هم دور شده‌اند.

۳. **مشاوره** سؤالات حرکت بر خط راست این آزمون از دو متحرک تشکیل شده است. معمولاً این جور سؤال‌ها وقت‌گیر هستند، پس اگر دیدید وقتتان را می‌گیرد، در انتهای آزمون به آن پاسخ دهید و وقتتان را صرف سؤالات دیگر کنید.

گزینه ۲ - ۴۹

۱. **درس نامه** در جدول زیر، چهار کمیت مربوط به حرکت ماهواره به دور زمین بررسی شده است.

کمیت	رابطه	تناسب
وزن	$W = \frac{GM_e m}{r^2}$	$W \propto \frac{1}{r^2}$
شتاب	$a = \frac{GM_e}{r^2}$	$a \propto \frac{1}{r^2}$
تندی	$v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$	$v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$
دوره گردش	$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_e}}$	$T \propto \sqrt{r^3}$

در جدول بالا، G ثابت گرانش عمومی، M_e جرم زمین، m جرم ماهواره و r فاصله تا مرکز زمین است.

۲. **بررسی سایر گزینه‌ها:** ۱. تندی ماهواره در گردش به دور زمین، با جذر فاصله آن از مرکز زمین نسبت وارون دارد. ۳. شتاب حرکت ماهواره با مجذور فاصله آن از مرکز زمین نسبت وارون دارد. ۴. وزن یک ماهواره با مجذور فاصله آن از مرکز زمین رابطه عکس دارد.

گزینه ۱ - ۵۰

۱. **درس نامه** نیروی خالص وارد بر جسم برابر با تغییر تکانه جسم تقسیم بر زمان تغییر آن است و از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید:

$$\vec{F}_{net} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

۲. ابتدا تکانه متحرک در لحظه‌های $t_1 = 1 \text{ s}$ و $t_2 = 3 \text{ s}$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{p} = (3t - 6)\vec{i} \xrightarrow{t_1=1 \text{ s}} \vec{p}_1 = (3(1) - 6)\vec{i} = -3\vec{i}$$

$$\vec{p} = (3t - 6)\vec{i} \xrightarrow{t_2=3 \text{ s}} \vec{p}_2 = (3(3) - 6)\vec{i} = 3\vec{i}$$

۳. حالا با جای‌گذاری داده‌ها در رابطه زیر، نیروی خالص متوسط در بازه زمانی $t_1 = 1 \text{ s}$ تا $t_2 = 3 \text{ s}$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{F}_{net} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{t_2 - t_1} \quad \begin{matrix} \vec{p}_1 = -3\vec{i}, \vec{p}_2 = 3\vec{i} \\ t_1 = 1 \text{ s}, t_2 = 3 \text{ s} \end{matrix} \Rightarrow \vec{F}_{net} = \frac{3\vec{i} - (-3\vec{i})}{3 - 1} = \frac{6\vec{i}}{2} = 3\vec{i} \text{ (N)}$$

۴. **مشاوره** قرار نیست از همه اطلاعات برای حل سؤال استفاده کنیم؛ مثلاً در حل این سؤال به جرم متحرک کاری نداشتیم و طراح اطلاعات اضافی داده است.



گزینه ۱ - ۵۶

شفاف سازی با توجه به معادله مکان - زمان نوسانگر:

$$x = A \cos \omega t$$

درس نامه ۱ فرم کلی معادله مکان - زمان نوسانگر هماهنگ ساده:

$$x = A \cos \omega t \quad \text{و} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

بسامد زاویای (rad/s) بسامد زاویای (rad/s)

دامنه (m) دوره تناوب (s)

۲ تندی متوسط: نسبت مسافت طی شده به زمان.

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \rightarrow (m) \text{ مسافت}$$

$$\Delta t \rightarrow (s) \text{ مدت زمان}$$

گام ۱ با توجه به معادله مکان - زمان نوسانگر، دوره تناوب نوسانگر را به دست می آوریم:

$$x = A \cos \omega t \rightarrow x = A \cos \omega t \rightarrow \omega = \Delta \pi \text{ rad/s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \Delta \pi = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 0.4 \text{ s}$$

گام ۲ بازه زمانی داده شده را بر حسب دوره تناوب به دست می آوریم:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{t_2 - t_1}{T} \rightarrow \frac{t_2 - t_1}{T = 0.4 \text{ s}} \rightarrow \frac{\Delta t}{0.4} = \frac{0.2}{0.4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2}$$

گام ۳ حالا مسافت طی شده در این بازه زمانی را با استفاده از تندی متوسط نوسانگر محاسبه می کنیم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \rightarrow \frac{s_{av} = 1.5 \text{ m/s}}{\Delta t = 0.2 \text{ s}} \rightarrow \ell = 1.5 \times 0.2 = 0.3 \text{ m} = 3 \text{ cm}$$

گام ۴ در آخر با توجه به نکته زیر، دامنه نوسان را به دست می آوریم.

نکته مسافتی که نوسانگر هماهنگ ساده در مدت زمان نصف دوره تناوب ($\frac{T}{2}$) طی می کند، برابر با $2A$ است.

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \ell = 2A \xrightarrow{\ell = 3 \text{ cm}} 2A = 3 \Rightarrow A = 1.5 \text{ cm}$$

گزینه ۴ - ۵۷

شفاف سازی مدت زمانی که طول می کشد تا هر یک از ذرات تار یک نوسان کامل انجام دهند، برابر با دوره تناوب موج است.

درس نامه دوره تناوب و بسامد معکوس یکدیگرند:

$$T = \frac{1}{f} \rightarrow \text{بسامد (Hz)}$$

گام ۱ با جای گذاری داده ها در رابطه زیر، بسامد تشدید هماهنگ اول تار (f) را به دست می آوریم:

$$f = \frac{nv}{2L} \rightarrow \frac{n=1, v=250 \text{ m/s}}{L=50 \text{ cm} = 0.5 \text{ m}} \rightarrow f = \frac{250}{2 \times 0.5} = 250 \text{ Hz}$$

گام ۲ مدت زمانی که هر یک از ذرات تار یک نوسان کامل انجام می دهد، برابر با دوره تناوب موج است. بنابراین دوره تناوب موج را با استفاده از بسامد آن محاسبه می کنیم:

$$T = \frac{1}{f} \xrightarrow{f=250 \text{ Hz}} T = \frac{1}{250} = 0.004 \text{ s} = 4 \text{ ms}$$

گزینه ۱ - ۵۸

درس نامه ۱ انرژی الکترون در اتم هیدروژن در مدار n ام:

$$E_n = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2}$$

شماره مدار الکترون

۲ در اتم هیدروژن وقتی که الکترون از یک حالت مانا با انرژی بیشتر (E_U) به یک حالت مانا با انرژی کمتر (E_L) می رود، یک فوتون گسیل می شود. انرژی این فوتون برابر با اختلاف انرژی بین دو مدار اولیه و نهایی است:

$$E_U - E_L = hf$$

همچنین اگر به الکترونی که در یک حالت مانا با انرژی کمتر (E_L) قرار دارد، فوتونی با انرژی $E_U - E_L$ بتابانیم، الکترون با دریافت این انرژی به یک حالت مانا با انرژی بیشتر (E_U) می رود.

این الکترون وقتی از مدار n به مدار n' می رود، فوتونی با انرژی $12/75 \text{ eV}$ گسیل می کند،

گام ۱ سه شکم در طول تار ایجاد شده است، پس تار بسامد تشدیدي هماهنگ سوم ($n=3$) خود را انجام می دهد. بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$f_n = nf_1 \Rightarrow 300 = 3 \times f_1 \Rightarrow f_1 = 100 \text{ Hz}$$

گام ۲ در آخر داده ها را در رابطه زیر جای گذاری می کنیم و تندی انتشار موج عرضی در تار را به دست می آوریم:

$$f_n = \frac{nv}{2L} \xrightarrow{\frac{f_n=300 \text{ Hz}, n=3}{L=60 \text{ cm} = 0.6 \text{ m}}} 300 = \frac{3v}{2 \times 0.6} \Rightarrow v = 120 \text{ m/s}$$

گزینه ۴ - ۵۴

درس نامه ۱ شدت صوت در فاصله r از چشمه صوت:

شدت صوت توان چشمه صوتی (W)

$$I = \frac{P_{av}}{4\pi r^2}$$

فاصله از چشمه صوت (m)

تراز شدت صوت (dB)

شدت صوت (W/m^2)

$$\beta_r - \beta_l = 10 \log \frac{I_r}{I_l} \rightarrow \beta_r - \beta_l = 10 \log \frac{I_r}{I_l}$$

تراز شدت صوت (dB)

شدت صوت (W/m^2)

۲ رابطه اختلاف تراز شدت دو صوت:

گام ۱ ابتدا نسبت $\frac{I_r}{I_l}$ را به دست می آوریم:

$$I = \frac{P_{av}}{4\pi r^2} \Rightarrow \frac{I_r}{I_l} = \frac{P_{av_r}}{P_{av_l}} \times \left(\frac{r_l}{r_r}\right)^2 \xrightarrow{P_{av_r} = 2P_{av_l}, r_r = \frac{1}{2}r_l} \frac{I_r}{I_l} = \frac{2}{1} \times \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^2 \Rightarrow \frac{I_r}{I_l} = 8$$

گام ۲ حالا با جای گذاری داده ها در رابطه زیر، اختلاف تراز شدت دو صوت را محاسبه می کنیم:

$$\beta_r - \beta_l = 10 \log \frac{I_r}{I_l} \xrightarrow{\frac{I_r}{I_l} = 8} \beta_r - \beta_l = 10 \log 8$$

$$\xrightarrow{\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2, \log 2 = 0.3} \beta_r - \beta_l = 10 \times 3 \times 0.3 = 9 \text{ dB}$$

بنابراین تراز شدت صوت ۹ dB افزایش می یابد.

تله با توجه به این که تراز شدت صوت ۹ dB افزایش یافته، به عنوان تله تستی مطرح شده تا به اشتباه ۹ برابر را انتخاب کنید.

گزینه ۳ - ۵۵

شفاف سازی با توجه به این که دوره تناوب آونگ افزایش یافته است، پس طول آونگ افزایش یافته است.

درس نامه دوره تناوب آونگ ساده:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow \text{طول آونگ (m)}$$

شتاب گرانش (m/s^2)

دوره تناوب (s)

گام ۱ طول آونگ تغییر کرده است و در اثر این تغییر، دوره تناوب آن افزایش می یابد.

طبق رابطه $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ ، برای این که دوره تناوب آونگ ساده افزایش پیدا کند، باید طول

آن افزایش یابد؛ بنابراین طول آونگ افزایش می یابد و می توانیم بنویسیم:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \frac{T_r}{T_l} = \sqrt{\frac{L_r}{L_l}} \xrightarrow{T_r = T_l + 1/2 \times 10^{-2} T_l = \frac{9}{10} T_l, L_r = L_l + 17 \text{ (cm)}} \frac{9}{10} = \sqrt{\frac{L_l + 17}{L_l}}$$

$$\Rightarrow \frac{81}{100} = \frac{L_l + 17}{L_l} \Rightarrow 81L_l = 100L_l + 1700 \Rightarrow 19L_l = 1700 \Rightarrow L_l = \frac{1700}{19} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow L_l = 89.47 \text{ cm} \approx 89.5 \text{ cm}$$

گام ۲ حالا می توانیم دوره تناوب آونگ قبل از تغییر طول را به دست بیاوریم:

$$T_l = 2\pi \sqrt{\frac{L_l}{g}} \xrightarrow{\frac{L_l = 89.47 \text{ m}}{g = 9.8 \text{ m/s}^2}} T_l = 2\pi \sqrt{\frac{89.47}{9.8}} = 2 \times 0.8 = 1.6 \text{ s}$$

تله اگر به اشتباه T_p را محاسبه کنید، به ۴ می رسید.



۲ انرژی ذخیره شده در خازن:

انرژی (J)

$$U = \frac{1}{2} QV$$

گام ۱ با توجه به این که نسبت اختلاف پتانسیل الکتریکی در دو حالت $(\frac{V_2}{V_1})$ معلوم است، نسبت بار الکتریکی خازن در دو حالت $(\frac{Q_2}{Q_1})$ را محاسبه می کنیم.

$$Q = CV \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{C_2}{C_1} \times \frac{V_2}{V_1} \xrightarrow{\frac{C_2}{C_1} = \frac{C_1}{V_2/V_1}} \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{3}{4}$$

گام ۲ حالا نسبت انرژی خازن در حالت دوم به حالت اول را پیدا می کنیم.

$$U = \frac{1}{2} QV \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{Q_2}{Q_1} \times \frac{V_2}{V_1} \xrightarrow{\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{3}{4}, \frac{V_2}{V_1} = \frac{3}{4}} \frac{U_2}{U_1} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

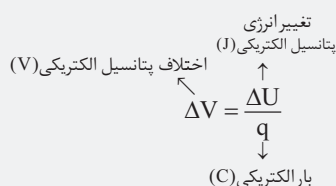
گام ۳ در آخر با توجه به این که انرژی خازن کاهش یافته است، کسر تغییر انرژی آن را

$$\text{به دست می آوریم: } U_2 = \frac{9}{16} U_1 \Rightarrow \frac{U_1 - U_2}{U_1} = \frac{U_1 - \frac{9}{16} U_1}{U_1} = \frac{\frac{7}{16} U_1}{U_1} = \frac{7}{16}$$

مشاوره تست های مربوط به خازن در اغلب کنکورهای چند سال اخیر به چشم می خورند. پس توجه ویژه ای به مبحث خازن داشته باشید.

۶۲ - گزینه ۴

درس نامه ۱ اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه از میدان الکتریکی:



هواستون باشه! توی این رابطه باید بار q رو با علامتش بذاریم.

۲ اگر ذره ای با بار الکتریکی منفی در جهت میدان الکتریکی حرکت کند، انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش و اگر در خلاف جهت میدان الکتریکی حرکت کند، انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش می یابد.

انرژی پتانسیل الکتریکی این بار الکتریکی در حرکت از نقطه A تا نقطه B افزایش یافته است. با توجه به این که علامت این بار الکتریکی منفی است، پس در جهت میدان الکتریکی حرکت کرده است (رد ۱ و ۲). با جای گذاری داده ها در رابطه زیر، مقدار $V_B - V_A$ را به دست می آوریم:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \xrightarrow{\frac{\Delta U = 2 \times 10^{-3} \text{ J}}{q = -2 \times 10^{-9} \text{ C}}} V_B - V_A = \frac{2 \times 10^{-3}}{-2 \times 10^{-9}} = -10^6 \text{ V}$$

تیزبازی علامت این بار الکتریکی منفی است و انرژی پتانسیل الکتریکی آن در حرکت از نقطه A تا نقطه B افزایش یافته است؛ بنابراین این بار الکتریکی در جهت میدان الکتریکی حرکت کرده است (رد ۱ و ۲). همچنین با توجه به این که با حرکت در جهت میدان الکتریکی پتانسیل الکتریکی کاهش می یابد، پس $V_B < V_A$ و در نتیجه $V_B - V_A < 0$ است. بنابراین فقط ۴ می تواند درست باشد.

۶۳ - گزینه ۱

استراتژی ۱ میدان الکتریکی حاصل از بار q_1 در نقطه M را E_1 می نامیم و میدان الکتریکی حاصل از بارهای q_2 و q_3 در نقطه M را برحسب E_1 می نویسیم، سپس میدان الکتریکی خالص هر سه آن ها (E) را به دست می آوریم.

۲ در حالتی که بار q_2 حذف شده، میدان الکتریکی خالص (E') حاصل از بارهای q_1 و q_3 در نقطه M را برحسب E_1 می نویسیم.

۳ نسبت $\frac{E'}{E}$ را پیدا می کنیم.

بنابراین با جای گذاری داده ها در رابطه زیر می توانیم n و n' را پیدا کنیم:

$$E_U - E_L = 12/75 \text{ eV} \xrightarrow{\frac{E_U = -\frac{E_R}{n'^2}}{\frac{E_L = -\frac{E_R}{n^2}}} \rightarrow -\frac{E_R}{n'^2} - (-\frac{E_R}{n^2}) = 12/75}$$

$$\xrightarrow{E_R = 13/6 \text{ eV}} \frac{13/6}{n'^2} - \frac{13/6}{n^2} = 12/75$$

$$\Rightarrow 13/6 \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) = 12/75 \Rightarrow \frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{12/75}{13/6} = \frac{15}{16}$$

$$\Rightarrow n' = 1, n = 4$$

۵۹ - گزینه ۲

درس نامه بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون ها در اثر فوتوالکتریک:

تندی انتشار امواج الکترومغناطیسی در خلأ (m/s) ثابت پلانک ($eV.s$)

$$K_{\max} = \frac{hc}{\lambda} - W_0$$

تابع کار فلز (eV) طول موج (m)

کافی است دو بار از معادله فوتوالکتریک استفاده کنیم و دستگاه تشکیل بدهیم.

$$K_{\max} = \frac{hc}{\lambda} - W_0 \xrightarrow{W_0 = 4 \text{ eV}, \lambda_2 = \frac{1}{3} \lambda_1} \begin{cases} K_{\max_1} = \frac{hc}{\lambda_1} - 4 \\ 6K_{\max_1} = \frac{6hc}{\lambda_1} - 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6K_{\max_1} = -\frac{6hc}{\lambda_1} + 24 \\ 6K_{\max_1} = \frac{6hc}{\lambda_1} - 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{hc}{\lambda_1} = \frac{5}{6}$$

$$\xrightarrow{\frac{h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV.s}}{c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}}} \frac{4 \times 10^{-15} \times 3 \times 10^8}{\lambda_1} = 5$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{12}{5} \times 10^{-7} \text{ m} \Rightarrow \lambda_1 = 240 \times 10^{-9} \text{ m} = 240 \text{ nm}$$

۶۰ - گزینه ۴

برای استفاده از اورانیوم به عنوان سوخت در نیروگاه های هسته ای یا استفاده در انفجارهای هسته ای، باید فراوانی ایزوتوپ ۲۳۵ را در یک نمونه اورانیوم افزایش بدهیم. به فرایند افزایش درصد یا غلظت ایزوتوپ ۲۳۵ در یک نمونه، غنی سازی می گوئیم.

تله ایزوتوپ های یک عنصر را نمی توانیم به یکدیگر تبدیل کنیم. اگر به این نکته توجه نکنید، ممکن است گزینه نادرست ۲ را انتخاب کنید. طرح زده به مفهوم!

مشاوره این سؤال از متن کتاب درسی طراحی شده است. خط به خط کتاب درسی را بخوانید تا سؤال ساده ای مثل این سؤال را از دست ندهید.

۶۱ - گزینه ۳

استراتژی ابتدا نسبت بار الکتریکی خازن در دو حالت $(\frac{Q_2}{Q_1})$ را محاسبه کنید، سپس نسبت انرژی آن در دو حالت $(\frac{U_2}{U_1})$ را به دست بیاورید و در آخر کسر تغییر انرژی خازن را پیدا کنید.

درس نامه ۱ رابطه بار الکتریکی با ظرفیت خازن و اختلاف پتانسیل دو سر آن:

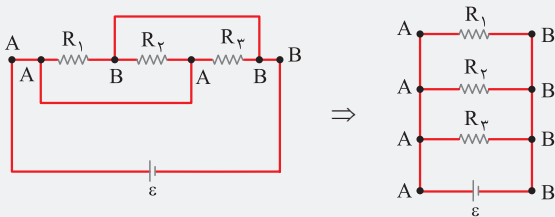
ظرفیت خازن (F) بار الکتریکی (C) اختلاف پتانسیل دو سر خازن (V)

$$Q = CV$$

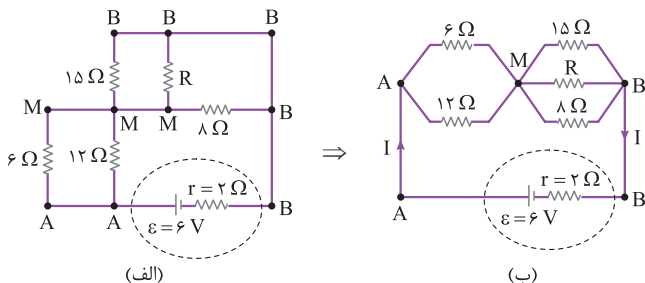


۵ ساده کردن شکل مدار به روش نام گذاری نقاط هم پتانسیل:

برای این کار، نقاطی از مدار را که با سیم به یکدیگر وصل شده اند، با یک نام مشترک در نظر می گیریم، بعد از نام گذاری چنین نقاطی از مدار، دو سر مولد یا دو سر مدار را مبنای قرار داده و سایر اجزای مدار را بین نقطه های نام گذاری شده، جای گذاری می کنیم تا شکل ساده تری از مدار به دست بیاید.



نقاط هم پتانسیل را نام گذاری می کنیم (شکل الف) و شکل ساده تری از مدار را رسم می کنیم (شکل ب).



مقاومت معادل حاصل از دو مقاومت موازی ۶ اهمی و ۱۲ اهمی را محاسبه می کنیم:

$$R_{AM} = \frac{6 \times 12}{6 + 12} = \frac{72}{18} = 4 \Omega$$

اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت های موازی با اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت معادل آن ها برابر است. همچنین از آن جا که اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت های ۶ اهمی و ۸ اهمی برابر است، می توانیم بنویسیم:

$$V_{AM} = V_{MB} \Rightarrow R_{AM} \times I_{AM} = R_{MB} \times I_{MB}$$

$$\frac{I_{AM} = I_{MB} = I}{R_{AM} = 4 \Omega} \rightarrow R_{MB} = 4 \Omega$$

بنابراین مقاومت معادل مدار برابر است با: $R_{eq} = R_{AM} + R_{MB} = 4 + 4 = 8 \Omega$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{6}{8 + 2} = \frac{6}{10} = 0.6 \text{ A}$$

در ادامه اختلاف پتانسیل بین دو نقطه A و M را با استفاده از رابطه $V = RI$ پیدا می کنیم:

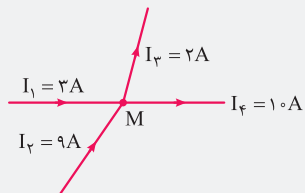
$$V_{AM} = R_{AM} \times I = \frac{R_{AM} = 4 \Omega}{I = 0.6 \text{ A}} \rightarrow V_{AM} = 4 \times 0.6 = 2.4 \text{ V}$$

در آخر جریان گذرنده از مقاومت ۸ اهمی را به دست می آوریم:

$$I_{8 \Omega} = \frac{V_{MB}}{8} = \frac{V_{MB} = V_{AM} = 2.4 \text{ V}}{8} \rightarrow I_{8 \Omega} = \frac{2.4}{8} = 0.3 \text{ A}$$

۶۵ - گزینه ۴

درس نامه ۱ قاعده انشعاب: مجموع



جریان هایی که به هر نقطه انشعاب (گره) وارد می شوند برابر با مجموع جریان هایی است که از آن نقطه انشعاب (گره) خارج می شوند؛ مثلاً در شکل روبه رو، جریان $I_1 + I_2 = 12 \text{ A}$ به گره M وارد شده و جریان $I_3 + I_4 = 12 \text{ A}$ از آن خارج شده است.

قانون اختلاف پتانسیل ها: در هر حلقه بسته، مجموع جبری اختلاف پتانسیل ها صفر است.

$$\sum V = 0 \Rightarrow \sum \varepsilon - \sum RI = 0$$

در به کار بردن این قانون، به نکات زیر توجه کنید:

(۱) یک جهت چرخش اختیاری در نظر می گیریم.

(۲) جهت جریان را در هر حلقه به دلخواه انتخاب می کنیم.

درس نامه ۱ اندازه میدان الکتریکی حاصل از یک ذره باردار q در فاصله r از آن.

اندازه میدان الکتریکی (C) $E = k \frac{|q|}{r^2}$

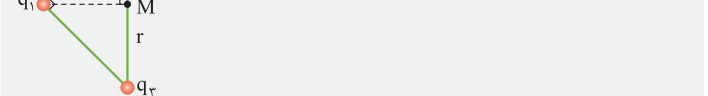
اندازه بار الکتریکی (N/C) $E = k \frac{|q|}{r^2}$

فاصله (m) $E = k \frac{|q|}{r^2}$

ثابت کولن $(\frac{N.m^2}{C^2})$ $E = k \frac{|q|}{r^2}$

جهت میدان الکتریکی، از بارهای مثبت رو به خارج و به سوی بارهای منفی است.

در یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است و همچنین میانه و عمود منصف بر هم منطبق هستند.



میدان الکتریکی حاصل از بار q_1 در نقطه M را E_1 می نامیم:

سیس میدان های الکتریکی حاصل از بارهای q_2 و q_3 در نقطه M را بر حسب E_1 می نویسیم:

$$E_2 = k \frac{q_2}{r^2} \rightarrow q_2 = 2q_1 \rightarrow E_2 = 2E_1$$

$$E_3 = k \frac{q_3}{r^2} \rightarrow q_3 = 3q_1 \rightarrow E_3 = 3E_1$$

میدان الکتریکی خالص ناشی از هر سه بار را در نقطه M به دست می آوریم:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2} = \sqrt{E_1^2 + (2E_1)^2 + (3E_1)^2} = \sqrt{14}E_1$$

بعد از حذف بار q_2 ، میدان الکتریکی خالص ناشی از بارهای q_1 و q_3 در نقطه M را به دست می آوریم:

$$E' = \sqrt{E_1^2 + (3E_1)^2} = \sqrt{10}E_1$$

نسبت $\frac{E'}{E}$ را محاسبه می کنیم:

$$\frac{E'}{E} = \frac{\sqrt{10}E_1}{\sqrt{14}E_1} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$$

۶۶ - گزینه ۲

درس نامه ۱ مقاومت معادل دو مقاومت موازی R_1 و R_2 :

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

مقاومت معادل دو مقاومت متوالی R_1 و R_2 :

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

تعریف مقاومت الکتریکی: نسبت اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر یک رسانا به جریان الکتریکی عبوری از آن.

جریان الکتریکی خروجی از باتری:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$$

مقاومت درونی مولد (Ω) $I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$

مقاومت معادل مدار (Ω) $I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$

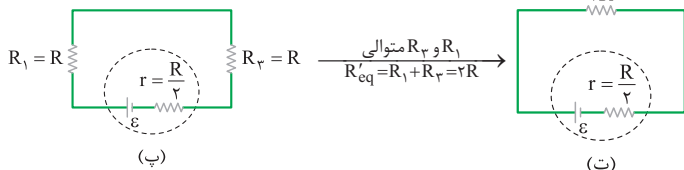


گام ۱ حالا جریان خروجی از باتری را محاسبه می‌کنیم تا بتوانیم با استفاده از آن، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت $3R$ را که برابر با اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری است، به دست بیاوریم.

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r} \xrightarrow{R_{eq}=3R, r=\frac{R}{3}} I = \frac{\mathcal{E}}{3R + \frac{R}{3}} = \frac{3\mathcal{E}}{10R}$$

$$V_{\text{باتری}} = R_{eq} I \xrightarrow{R_{eq}=3R, I=\frac{3\mathcal{E}}{10R}} V_{\text{باتری}} = (3R) \left(\frac{3\mathcal{E}}{10R} \right) = \frac{9}{10} \mathcal{E}$$

گام ۲ در حالت دوم، وقتی کلید را می‌بندیم، پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت R_1 یکسان شده و در نتیجه اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن صفر می‌شود. در این حالت مقاومت معادل مدار در این حالت می‌رویم (شکل ت).



گام ۳ حالا جریان خروجی از باتری در حالت دوم را محاسبه می‌کنیم تا بتوانیم با استفاده از آن، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت $2R$ را که برابر با اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری است، به دست بیاوریم.

$$I' = \frac{\mathcal{E}}{R'_{eq} + r} \xrightarrow{R'_{eq}=2R, r=\frac{R}{3}} I' = \frac{\mathcal{E}}{2R + \frac{R}{3}} = \frac{3\mathcal{E}}{7R}$$

$$V'_{\text{باتری}} = R'_{eq} I' \xrightarrow{R'_{eq}=2R, I'=\frac{3\mathcal{E}}{7R}} V'_{\text{باتری}} = (2R) \left(\frac{3\mathcal{E}}{7R} \right) = \frac{6}{7} \mathcal{E}$$

گام ۴ در آخر خواسته سؤال یعنی نسبت $\frac{V'_{\text{باتری}}}{V_{\text{باتری}}}$ را محاسبه می‌کنیم و تمام!

$$\frac{V'_{\text{باتری}}}{V_{\text{باتری}}} = \frac{\frac{6}{7} \mathcal{E}}{\frac{9}{10} \mathcal{E}} = \frac{14}{15}$$

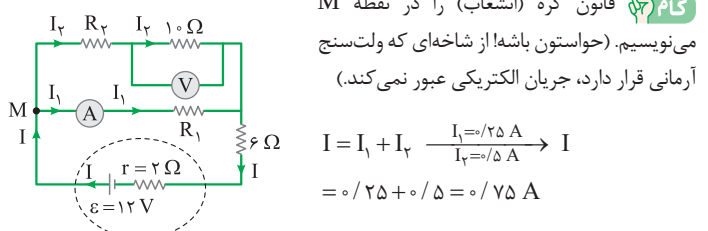
(۳) برای نوشتن $\mathcal{E}$ ها، با توجه به جهت چرخش در مدار، اگر از پایانه مثبت باتری خارج شویم نیروی محرکه باتری را مثبت $(+\mathcal{E})$ و اگر از پایانه منفی باتری خارج شویم نیروی محرکه باتری را منفی $(-\mathcal{E})$ در نظر می‌گیریم.

(۴) برای نوشتن R ها، اگر در جهت جریان از مقاومت عبور کنیم، چون پتانسیل الکتریکی در حال کاهش است، RI را منفی $(-RI)$ و اگر در خلاف جهت جریان از مقاومت عبور کنیم، چون پتانسیل الکتریکی در حال افزایش است، RI را مثبت $(+RI)$ در نظر می‌گیریم. اگر علامت جریان مثبت به دست آمد، یعنی جهت انتخابی درست است و اگر منفی به دست آمد، فقط جهت جریان در شاخه مورد نظر را برعکس می‌کنیم.

گام ۵ با استفاده از رابطه $I = \frac{V}{R}$ ، جریانی را که از مقاومت 10 اهمی می‌گذرد، به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{V}{R} \xrightarrow{V=5V, R=10\Omega} I_2 = \frac{5}{10} = 0.5 \text{ A}$$

گام ۶ قانون گره (انشعاب) را در نقطه M می‌نویسیم. حواستون باشه! از شاخه‌ای که ولت‌سنج آرمانی قرار دارد، جریان الکتریکی عبور نمی‌کند.



$$I = I_1 + I_2 \xrightarrow{I_1=0.5A, I_2=0.5A} I = 0.5 + 0.5 = 1 \text{ A}$$

گام ۷ قانون اختلاف پتانسیل ها را در حلقه پایین مدار به کار می‌بریم و در جهت ساعتگرد از اجزای مدار می‌گذریم.

$$-I_1 R_1 - 6I - rI + \mathcal{E} = 0 \xrightarrow{I_1=0.5A, I=1A, r=2\Omega, \mathcal{E}=12V} -0.5 \times 10 - 6 \times 1 - 2 \times 1 + 12 = 0$$

$$\Rightarrow 6 = 0.5 R_1 \Rightarrow R_1 = 12 \Omega$$

تیزبازی مقاومت R_1 با مجموع مقاومت‌های R_2 و 10Ω به طور موازی بسته

$$\text{شده‌اند؛ پس داریم: } V_{R_1} = V_{R_2} + V_{10\Omega} \Rightarrow V_{R_1} > V_{10\Omega} \Rightarrow I_1 R_1 > 5$$

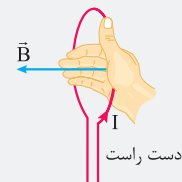
$$\Rightarrow 0.5 R_1 > 5 \Rightarrow R_1 > 10 \Omega$$

پس تنها جواب ممکن ۱۲ است.

۶۷- گزینه ۱

درس نامه ۱ بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز پیچه مسطح:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R} \rightarrow (A) \text{ جریانی الکتریکی}$$

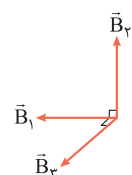


۲ برای تشخیص جهت میدان مغناطیسی در اطراف حلقه حامل جریان از قاعده دست راست استفاده می‌کنیم. طبق این قاعده، اگر انگشت شست دست راست را در جهت جریان قرار بدهیم، جهت خم شدن چهار انگشت دست راست، جهت میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد.

گام ۱ با توجه به این که جریان عبوری از هر حلقه و شعاع آن‌ها با یکدیگر یکسان است، پس میدان مغناطیسی حاصل از هر حلقه در مرکز حلقه‌ها (نقطه O) نیز یکسان است و می‌توانیم بنویسیم:

$$B_1 = B_2 = B_3 = B = \frac{\mu_0 NI}{2R} = \frac{12 \times 10^{-7} \times 1 \times 10^3 / 5}{2 \times (0.15)} = 2 \times 10^{-6} \text{ T}$$

گام ۲ طبق قاعده دست راست، اگر انگشت شست دست راست را در جهت جریان قرار بدهیم، جهت خم شدن چهار انگشت جهت میدان مغناطیسی در مرکز حلقه را نشان می‌دهد. جهت میدان مغناطیسی ناشی از سه حلقه را به دست می‌آوریم.



۶۶- گزینه ۳

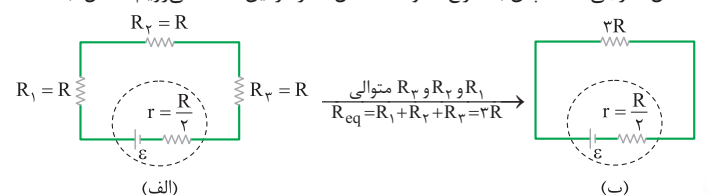
شفاف‌سازی وقتی کلید را می‌بندیم، مقاومت الکتریکی R اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌شود.

درس نامه ۱ اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری برابر با اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت معادل خارجی است.

$$V_{\text{باتری}} = V_R$$

۲ اتصال کوتاه، اگر دو سر مقاومتی را با یک سیم بدون مقاومت به هم وصل کنیم، پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت الکتریکی یکسان شده و در نتیجه اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن صفر می‌شود. در این حالت مقاومت الکتریکی اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌گردد.

گام ۱ در ابتدا کلید باز است و مقاومت R_2 در مدار حضور دارد (شکل الف). با توجه به این که اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری برابر با اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت معادل خارجی است، پس به سراغ مقاومت معادل مدار در این حالت می‌رویم (شکل ب).





۷۰- گزینه ۲

درس نامه نیروی محرکه القایی متوسط برای پیچه یا سیم‌لوله‌ای که از N دور مشابه تشکیل شده است:

مساحت حلقه (m^2) → تغییر میدان مغناطیسی (T)

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta B A \cos \theta}{\Delta t}$$

زاویه بین بردار میدان مغناطیسی و نیم‌خط عمود بر سطح حلقه
نیروی محرکه القایی متوسط (V)

برای تبدیل گالس به تسلا (و برعکس) به صورت مقابل عمل می‌کنیم:

$$G \xrightarrow[\times 10^{-4}]{\div 10^4} T$$

کافیت داده‌ها را در رابطه زیر جای‌گذاری کنیم:

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta B A \cos \theta}{\Delta t} \quad \begin{matrix} N=1, \Delta B = -6000 \times 10^{-4} T, \Delta t = 15/7 \times 10^{-2} s \\ A = \pi r^2 = 3/14 \times 10^{-2} m^2, \theta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \end{matrix}$$

$$\varepsilon_{av} = -1 \times \frac{(-6000 \times 10^{-4}) \times \frac{3}{14} \times 10^{-2} \times \cos 60^\circ}{15/7 \times 10^{-2}} = 0.6 V$$

تله اگر به اشتباه θ را 30° در نظر بگیرید، به گزینه نادرست ۱ می‌رسید.

۷۱- گزینه ۱

گام ۱ نقاط C و D در سطح آزاد مایع‌ها هستند و فشار این دو نقطه یکسان و برابر با P_0 است.

گام ۲ فشار در نقاط A و M ، به دلیل این‌که در یک مایع و در یک تراز قرار دارند، با هم برابر است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$P_A = P_M \Rightarrow P_A = P_B + \rho_r g h_r$$

$$\Rightarrow P_A > P_B$$

گام ۳ فشار در نقطه B ناشی از فشار هوا و مایع ρ_r است؛ بنابراین داریم:

$$P_B = P_0 + \rho_r g h_r \xrightarrow{P_0 = P_C} P_B = P_C + \rho_r g h_r \Rightarrow P_B > P_C$$

پس در نتیجه $P_A > P_B > P_C = P_D$ است.

تیزبازی با توجه به این‌که $P_C = P_D = P_0$ است، رد می‌شود، چون $P_C > P_D$ نیست. همچنین ۳ و ۴ هم رد می‌شوند؛ چون در این دو گزینه، با توجه به این‌که $P_A = P_B$ است، $P_C = P_D$ می‌شود که درست نیست.

۷۲- گزینه ۴

درس نامه به اختلاف فشار مطلق (P) و فشار جو (P_0)، فشار پیمانه‌ای می‌گوییم و آن را با P_g نشان می‌دهیم.

شکل مقابل وضعیت وزنه را که روی روزه قرار دارد، نشان می‌دهد.

برای این‌که وزنه در تعادل باشد، باید براینده نیروهای وارد بر وزنه صفر باشد؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$P_A + mg = P_{\text{زودپز}} \Rightarrow P_0 + \frac{mg}{A} = P_{\text{داخل زودپز}} \Rightarrow \frac{mg}{A} = P_{\text{داخل زودپز}} - P_0$$

فشار پیمانه‌ای بخار داخل زودپز

$$P_g = \frac{mg}{A} \Rightarrow 1.5 = \frac{m \times 10}{5 \times 10^{-6}} \Rightarrow m = 5 \times 10^{-2} \text{ kg} = 50 \text{ g}$$

مشاوره تمام تمرین‌ها، مثال‌ها، شکل‌ها و ... کتاب درسی را بخوانید. این سؤال مشابه تمرین کتاب درسی است.

گام ۱ برایند میدان مغناطیسی ناشی از $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ را محاسبه می‌کنیم.

$$B_{1,2} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \xrightarrow{B_1=B_2=B} B_{1,2} = B\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{B=2 \times 10^{-6} T} B_{1,2} = 2\sqrt{2} \times 10^{-6} T$$

گام ۲ بر $\vec{B}_{1,2}$ عمود است، پس برایند میدان مغناطیسی ناشی از $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ را به دست می‌آوریم:

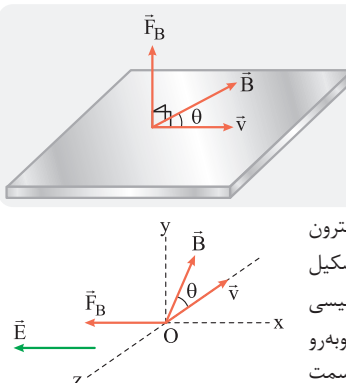
$$B_T = \sqrt{B_{1,2}^2 + B_{1,2}^2} = \sqrt{(2\sqrt{2} \times 10^{-6})^2 + (2 \times 10^{-6})^2}$$

$$\Rightarrow B_T = 2 \times 10^{-6} \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (1)^2} = 2\sqrt{3} \times 10^{-6} T$$

۶۸- گزینه ۴

گام ۱ برای این‌که الکترون بدون انحراف در مسیر حرکت کند، باید نیرویی که از طرف میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی به الکترون وارد می‌شود، با هم برابر و در خلاف جهت هم باشند. ذره باردار و نیروهای واردشده را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم (چون ذره باردار منفی است، پس جهت نیروی الکتریکی وارد بر ذره، در خلاف جهت میدان الکتریکی است).

گام ۲ **نکته** نیرویی که از طرف میدان مغناطیسی بر ذره باردار وارد می‌شود، هم بر راستای حرکت ذره و هم بر میدان مغناطیسی عمود است.



با توجه به نکته بالا، نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون ($\vec{F}_B$) بر صفحه‌ای که بردار $\vec{v}$ و بردار $\vec{B}$ تشکیل می‌دهند، عمود است؛ بنابراین میدان مغناطیسی ($\vec{B}$) و راستای حرکت ($\vec{v}$) باید به صورت روبه‌رو در صفحه YOZ باشند تا نیروی مغناطیسی به سمت چپ باشد.

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، میدان الکتریکی عمود بر راستای حرکت است ($\vec{E}$ در خلاف جهت محور X و $\vec{v}$ در صفحه YOZ است). اما $\vec{B}$ هر زاویه دلخواهی به غیر از صفر و 180° می‌تواند داشته باشد.

۶۹- گزینه ۱

شفاف‌سازی عدد $15/7$ با ما آلازم می‌دهد که مقدار π را باید $3/14$ در نظر بگیریم.

درس نامه ضریب القاوری سیم‌لوله آرمانی و بدون هسته:

سطح مقطع سیم‌لوله (m^2) → تعداد دور

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}$$

طول سیم‌لوله (m)

ضریب القاوری (H)

کافیت داده‌ها را در رابطه زیر جای‌گذاری کنیم و ضریب القاوری سیم‌لوله را به دست بیاوریم (تبدیل واحد یاد تیره!)

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} \xrightarrow{\begin{matrix} N=1000, A=8 \times 10^{-4} m^2 \\ \mu_0=4\pi \times 10^{-7} T.m/A, \ell=15/7 \times 10^{-2} m \end{matrix}}$$

$$L = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times (1000)^2 \times 8 \times 10^{-4}}{15/7 \times 10^{-2}}$$

$$= \frac{4 \times 3/14 \times 10^{-7} \times 10^6 \times 8 \times 10^{-4}}{15/7 \times 10^{-2}} = 6/4 \times 10^{-2} H = 6/4 \text{ mH}$$

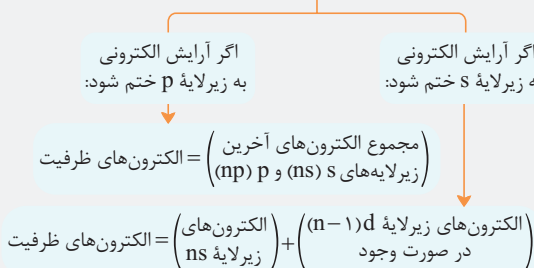


شیمی

۷۶ - گزینه ۲

نکته

تعیین تعداد الکترون‌های ظرفیتی اتم‌ها



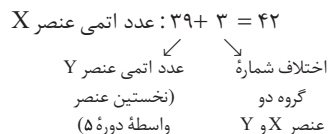
گام ۱ ابتدا آرایش الکترون‌های ظرفیتی اتم X و عدد اتمی آن را به دست می‌آوریم:

بیست و چهارمین عنصر جدول تناوبی، کروم ($24Cr$) است که آرایش الکترون‌های ظرفیت آن به صورت $3d^5 4s^1$ است؛ بنابراین عنصر X فلزی واسطه است و آرایش الکترونی آن به $(n-1)d^5 ns^1$ ختم می‌شود.

روش ۱ عنصر X فلزی واسطه بوده و بنابراین یون پایدار آن کاتیون است و طبق اطلاعات داده‌شده در سؤال با تبدیل شدن به کاتیون، شمار الکترون‌های آن با شمار الکترون‌های نخستین عنصر واسطه دوره پنجم جدول برابر می‌شود؛ بنابراین عنصر X در دوره پنجم قرار دارد ($n=5$) و آرایش الکترونی آن به $4d^5 5s^1$ ختم شده و عدد اتمی آن ۴۲ است:



روش ۲ نخستین عنصر واسطه دوره پنجم (Y)، در گروه ۳ قرار دارد و عدد اتمی آن، ۳ واحد بیشتر از گاز نجیب دوره چهارم ($36Kr$) است؛ بنابراین عدد اتمی آن $36+3=39$ است. از طرفی عنصر X همانند عنصر $36Cr$ در گروه ۶ جدول قرار دارد که با توجه به اطلاعات داده‌شده با از دست دادن الکترون و تبدیل شدن به کاتیون، شمار الکترون‌های آن به ۳۹ رسیده است؛ بنابراین:



گام ۲ به دست آوردن شمار نوترون‌های اتم $42X$: $42-39=3$ = شمار نوترون‌ها

۷۷ - گزینه ۳

طیف نشری خطی، وسیله شناسایی عناصرها است، دقیقاً مثل بارکد یا خط نماد روی بسته‌های مواد غذایی و کالاها! (که اطلاعاتی مانند نوع کالا، قیمت، تاریخ انقضا و ... در آن درج شده است.) یعنی طیف نشری خطی و خط نماد، از نظر این‌که وسیله شناسایی هستند، به هم شبیه‌اند ولی طیف نشری خطی عناصرها، کاربردی در خط نماد کالاها ندارد و در آن استفاده نشده است!

تله در حاشیه یکی از صفحه‌های فصل ۱ کتاب درسی شیمی دهم می‌خوانیم که کاربرد طیف‌های نشری خطی از برخی جنبه‌ها مانند کاربرد خط نماد (بارکد) روی جعبه یا بسته مواد غذایی و کالاهاست؛ بنابراین طیف نشری خطی و خط نماد روی بسته کالاها فقط از نظر کاربرد، شبیه هم‌اند. طراح در این عبارت با جابه‌جایی کلمات، مفهوم جمله کتاب درسی را به شکل هوشمندانه‌ای تغییر داده و گفته که یکی از کاربردهای طیف نشری خطی در «خط نماد» روی بسته کالاهاست که غلطه! و باید خیلی دقیق باشی تا تو دام این عبارت نیفتی!

۷۳ - گزینه ۱

درس‌نامه ۱ کار نیروی ثابت F :

جابه‌جایی (m)

$$W = Fd \cos \theta$$

زاویه بین نیرو و جابه‌جایی

نیرو (N)

۲ قضیه کار - انرژی جنبشی: کار کل وارد بر یک جسم در یک جابه‌جایی معین برابر با تغییر انرژی جنبشی آن است.

با استفاده از قضیه کار - انرژی جنبشی می‌توانیم بنویسیم (کار نیروی وزن و نیروی عمودی سطح چون بر جابه‌جایی عمود هستند، صفر است):

$$W_t = \Delta K \Rightarrow \cancel{W_{mg}} + \cancel{W_{FN}} + W_F + W_{fk} = \Delta K$$

$$\Rightarrow Fd \cos 37^\circ + f_k d \cos 18^\circ = \Delta K$$

$$\Rightarrow 6000 \times 5 \times 0.8 + 4000 \times 5 \times (-1) = \Delta K$$

$$\Rightarrow \Delta K = 24000 - 20000 = 4000 \text{ J}$$

۷۴ - گزینه ۴

درس‌نامه طبق قانون پایستگی انرژی، جمع جبری گرماهای مبادله‌شده تا رسیدن به حالت تعادل، برابر با صفر است.

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \Rightarrow m_1 c_1 (\theta - \theta_1) + m_2 c_2 (\theta - \theta_2) + m_3 c_3 (\theta - \theta_3) = 0$$

طبق قانون پایستگی انرژی، جمع جبری گرماهای مبادله‌شده تا رسیدن به حالت تعادل، برابر با صفر است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \Rightarrow m_{\text{آب}} c_{\text{آب}} (\theta - \theta_{\text{آب}}) + m'_{\text{آب}} c_{\text{آب}} (\theta - \theta'_{\text{آب}}) + m_{\text{طرف}} c_{\text{طرف}} (\theta - \theta_{\text{طرف}}) = 0$$

$$\Rightarrow 80 \times 10^{-3} \times 4200 (\theta - 20) + 20 \times 10^{-3} \times 4200 (\theta - 80) + 300 \times 10^{-3} \times 400 (\theta - 32) = 0$$

$$\Rightarrow 84(\theta - 20) + 21(\theta - 80) + 30(\theta - 32) = 0$$

$$\Rightarrow 84\theta - 1680 + 21\theta - 1680 + 30\theta - 960 = 0 \Rightarrow 135\theta = 4320 \Rightarrow \theta = 32^\circ \text{C}$$

۷۵ - گزینه ۳

درس‌نامه با توجه به معادله حالت گاز کامل ($PV = nRT$)، برای مقایسه دو حالت مختلف، رابطه کلی مقابل را در نظر بگیرید و هر کمیتی را که در سؤال ثابت فرض شده بود، از طرفین این رابطه حذف کنید.

گام ۱ در حالت اول، فشار گاز زیر پیستون برابر با مجموع فشار هوا و فشار ناشی از وزن پیستون قرار گرفته در بالای گاز است. با توجه به شکل (الف)، فشار گاز و حجم گاز در حالت اول را به دست می‌آوریم (جرم پیستون را m فرض می‌کنیم).

$$P_1 = \frac{mg}{A} + P_0, \quad V_1 = 40 \times A = 40A$$

گام ۲ فشار گاز و حجم گاز در حالت دوم را که وزنه‌ای با جرم ۹ برابر جرم پیستون روی آن قرار داده‌ایم، به دست می‌آوریم (شکل ب).

$$P_2 = \frac{(9m + m)g}{A} + P_0$$

$$= \frac{10mg}{A} + P_0, \quad V_2 = A \times 30 = 30A$$

گام ۳ حالا با جای‌گذاری داده‌ها در رابطه زیر، P_2 را به دست می‌آوریم:

$$\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2} \xrightarrow{n_1=n_2, T_1=T_2} P_1 V_1 = P_2 V_2 \Rightarrow (P_0 + \frac{mg}{A}) \times 40A = P_2 \times 30A$$

$$= (P_0 + \frac{10mg}{A}) \times 40A \Rightarrow 40P_0 + \frac{400mg}{A} = 30P_0 + \frac{300mg}{A} \Rightarrow P_0 = \frac{26mg}{A}$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{26 \times 10^{-3} \times 9.8 \times 10}{50 \times 10^{-4}} = 9.8 \times 10^4 \text{ Pa}$$

۷۹- گزینه ۱

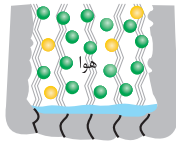
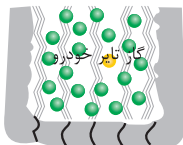


بررسی گزینه‌ها: ۱ با توجه به شکلی که در فصل ۲ کتاب درسی شیمی دهم در رابطه با لایه اوزون آورده شده است، از هر ۵ پروتو فرابنفش، ۴ تای آن‌ها توسط اوزون جذب شده و فقط یکی از آن‌ها می‌تواند فرار کند؛ پس می‌شه گفت حدود $80 = 100 \times \frac{4}{5}$ درصد تابش فرابنفش توسط لایه اوزون جذب می‌شود که بیشتر از ۷۵ درصد!

۲ در فرایند هابر (تهیه NH_3 از گازهای N_2 و H_2)، باید فراورده (آمونیاک) را از مخلوط جدا کنیم که برای این کار (مایع‌شدن آمونیاک)، دما را باید کمی پایین‌تر از نقطه جوش آمونیاک (حدود $-34^\circ C$) بیاوریم. دقت کنید که در این فرایند دما را به هیچ وجه نباید پایین‌تر از دمای جوش نیتروژن ($-196^\circ C$) و هیدروژن ($-253^\circ C$) آورد، چون این‌طوری این گازها نیز مایع شده و با آمونیاک مایع قاطی‌پاتی می‌شوند.

نکته مقایسه نقطه جوش مواد شرکت‌کننده در واکنش تولید آمونیاک (این‌پوریست):
 $NH_3 > N_2 > H_2$
 $-34^\circ C \quad -196^\circ C \quad -253^\circ C$

۳ نسبت درصد گاز نیتروژن در هوا به درصد این گاز در تایر خودرو حدود $\frac{78}{95}$ است که قطعاً با $95/0$ برابر نیست.



● نیتروژن ۷۸٪
 ● اکسیژن ۲۱٪
 ● آب ۱٪

● نیتروژن ۷۸٪
 ● اکسیژن ۲۱٪
 ● آب ۱٪

۴ گاز نیتروژن (N_2)، فراوان‌ترین جزء سازنده هواکه است که واکنش‌پذیری ناچیزی دارد، اما در صنعت، مواد مختلفی از آن تهیه می‌کنند.

مشاوره ۱ و ۳، تحلیل‌های عددی از شکل‌های کتاب درسی است که تاکنون به این صورت در کنکور مطرح نشده بودن، متأسفانه طراحان کنکور برای پررنگ کردن اهمیت کتاب درسی، رو به طرح این عبارتهای غیراستاندارد برده‌اند! پی‌بگیریم! از اهمیت کتاب درسی غافل نشید.

۸۰- گزینه ۴

ابتدا معادله موازنه‌شده واکنش‌ها را می‌نویسیم:
 I) $N_2 + O_2 \rightarrow 2NO$
 II) $2NO + O_2 \rightarrow 2NO_2$

روش استفاده از کسرهای تناسب:

ضریب ماده مشترک (NO)، در دو واکنش برابر است (نیازی به یکسان‌سازی ضریب این ماده در واکنش‌ها نداریم)؛ بنابراین می‌تونیم به طور مستقیم بین واکنش‌دهنده‌های واکنش (I) و فراورده واکنش (II)، برای قسمت دوم سؤال، روابط استوکیومتری بنویسیم:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم}}{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}}$$

$$\frac{O_2 - N_2}{O_2 - N_2} = \frac{NO}{NO_2}$$

نکته در مسائل استوکیومتری واکنش، در مواردی که به جای جرم یک ماده، مجموع یا تفاوت جرم دو ماده خواسته شده یا داده می‌شود، کسر تناسب مربوط به جرم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\text{مجموع جرم دو ماده}}{\text{جرم مولی ماده} \times 2 + (\text{جرم مولی ماده} \times \text{ضریب ماده})} = \frac{\text{تفاوت جرم دو ماده}}{(\text{جرم مولی ماده} \times 2 - (\text{جرم مولی ماده} \times \text{ضریب ماده}))}$$

بررسی سایر گزینه‌ها: ۱ هر عنصر (چه فلز، چه نافلز، چه شبه‌فلز) طیف نشری خطی ویژه خود را دارد؛ یعنی تعداد خطوط و محل قرارگیری آن‌ها (طول موج خط‌های طیفی) در طیف نشری خطی برای هر عنصر اختصاصی است و مانند اثر انگشت می‌توان از این طیف‌ها برای شناسایی عنصرها استفاده کرد. ۲ در ناحیه مرئی طیف نشری خطی هر یک از اتم‌های H و Li، ۴ خط یا نوار رنگی وجود دارد. ۳ رنگ شعله نمک‌ها به دلیل وجود عنصر فلزی در آن‌هاست، بنابراین با استفاده از تغییر رنگ شعله، می‌توان به وجود عنصر فلزی (نه نافلزی!) در آن پی برد.

۷۸- گزینه ۴

نکته تعیین شماره دوره و گروه عنصرها با استفاده از عدد اتمی گازهای نجیب: تعیین شماره دوره، کافی است عدد اتمی عنصر مورد نظر را بین عدد اتمی دو گاز نجیب قرار دهیم، شماره دوره عنصر با شماره دوره گاز نجیب بعد از آن یکسان است.

عدد اتمی گازهای نجیب: ۲، ۱۰، ۱۸، ۳۶، ۵۴، ۸۶، ۱۱۸
 دوره ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷

تعیین شماره گروه: برای تعیین شماره گروه:

۱ اگر عدد اتمی عنصر مورد نظر یک یا دو واحد بیشتر از عدد اتمی یکی از گازهای نجیب باشد، شماره گروه عنصر به ترتیب برابر ۱ یا ۲ است:

مثال: $19 - 18 = 1 \Rightarrow 19X$ شماره گروه عنصر $19X$ عدد اتمی $18Ar$

۲ عنصرهایی که در دو ردیف در پایین جدول قرار دارند (عنصرهای ۵۷ تا ۷۰ و ۸۹ تا ۱۰۲ جدول) را می‌توان متعلق به گروه ۳ دانست.

۳ برای بقیه عنصرها که عدد اتمی آن‌ها بیش از ۲ واحد از عدد اتمی گاز نجیب قبل از خود بیشتر است، باید اختلاف عدد اتمی عنصر و گاز نجیب هم‌دوره‌اش را از عدد ۱۸ کم کنیم:

مثال: $47 - (54 - 18) = 11$ شماره گروه = ۱۱
 عدد اتمی عنصر گاز نجیب هم‌دوره

گام ۱ ابتدا شماره دوره و گروه عنصر X در جدول دوره‌ای را به دست می‌آوریم:

تعیین شماره دوره عنصر X: عنصرهایی با عددهای اتمی ۱۹ تا ۳۶ در دوره چهارم قرار دارد؛ بنابراین عنصر X مانند $38Ni$ متعلق به دوره چهارم است.

تعیین شماره گروه عنصر X: عنصر X با نخستین عنصر ساخت بشر، یعنی تکنسیم با عدد اتمی ۴۳ ($93Tc$) هم‌گروه است و هر دو متعلق به گروه ۷ جدول دوره‌ای‌اند.

$43 - (54 - 18) = 7$ شماره گروه = ۷
 عدد اتمی تکنسیم گاز نجیب هم‌دوره

گام ۲ با توجه به شماره دوره و گروه عنصر X، آرایش الکترونی آن را می‌نویسیم: عنصر

X در دوره چهارم و گروه ۷ قرار دارد، بنابراین آرایش الکترونی آن به $3d^5 4s^2$ ختم شده و همان منگنز ($25Mn$) است:

گام ۳ با توجه به فرمول‌های شیمیایی داده‌شده در گزینه‌ها، بار کاتیون X^{n+} را تشخیص داده و آرایش الکترونی آن را می‌نویسیم. با توجه به بار یون‌های O^{2-} ، Cl^- و فرمول‌های داده‌شده در گزینه‌ها، X می‌تواند دو نوع کاتیون دو بار مثبت (X^{2+}) و سه بار مثبت (X^{3+}) تشکیل دهد.

$X_2O_3 \Rightarrow X^{3+} : [18Ar] 3d^4$

$XCl_4 \Rightarrow X^{2+} : [18Ar] 3d^5$

تیزبازی با به نگاه به گزینه‌ها می‌شه فهمید که عنصر X یک فلز واسطه است و از آن‌جا که در آرایش الکترونی کاتیون فلزهای واسطه، زیرلایه ns وجود ندارد، ۱ و ۲ سریع حذف می‌شن. از اون‌جایی که عنصر X مانند $93Tc$ متعلق به گروه ۷ جدول، آرایش الکترونی آن به $(n-1)d^5 ns^2$ و با توجه به دو گزینه باقی‌مانده آرایش الکترونی کاتیون‌های X^{2+} و X^{3+} آن به ترتیب به $(n-1)d^5$ و $(n-1)d^4$ ختم می‌شه، پس جواب می‌شه ۴ و تمام!



روش استفاده از کسر تبدیل:

$$42750 \times 10^{-4} \text{ g Ba(OH)}_2 \times \frac{1 \text{ mol Ba(OH)}_2}{171 \text{ g Ba(OH)}_2} \times \frac{2 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol Ba(OH)}_2} \\ \times \frac{1 \text{ L HCl(aq)}}{0.4 \text{ mol HCl}} \times \frac{1000 \text{ mL}}{1 \text{ L}} = \frac{21375}{171} > 100 \Rightarrow \text{④}$$

نکته ۱ برای تبدیل درصد جرمی و غلظت ppm به یکدیگر از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{ppm} = \text{درصد جرمی} \times 10^4$$

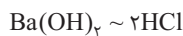
نکته ۲ برای تبدیل درصد جرمی و غلظت مولار یک محلول به یکدیگر از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{درصد جرمی محلول} \uparrow \\ \text{چگالی محلول (g/mL)} \rightarrow \text{۱۰ad} \\ M = \frac{\text{جرم مولی حل‌شونده}}{(\text{غلظت مولار})}$$

می‌توانیم ابتدا غلظت مولی محلول باریم هیدروکسید را به دست آورده و سپس محاسبات را انجام بدهیم.

$$\frac{10ad}{\text{جرم مولی}} = \text{غلظت مولی}, a = \text{ppm} \times 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \text{Ba(OH)}_2 \text{ غلظت مولی} = \frac{10 \times 21375 \times 10^{-4} \times 1}{171} = \frac{21375}{171} \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$



روش استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}} \\ \frac{\text{Ba(OH)}_2}{\text{HCl}}$$

$$\Rightarrow \frac{21375 \times 10^{-3} \times 200}{171 \times 1} = \frac{0.4 \times x}{1 \times 1} \Rightarrow x = \frac{21375}{171} > 100 \Rightarrow \text{④}$$

روش استفاده از کسر تبدیل:

$$2\% \text{ mL Ba(OH)}_2 \text{ (aq)} \times \frac{21375 \times 10^{-4} \text{ mol Ba(OH)}_2}{171 \text{ L Ba(OH)}_2 \text{ (aq)}}$$

$$\times \frac{2 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol Ba(OH)}_2} \times \frac{1 \text{ L HCl(aq)}}{0.4 \text{ mol HCl}} = \frac{21375}{171} > 100 \Rightarrow \text{④}$$

۸۳- گزینه ۱

نکته در جدول زیر برخی از ویژگی‌های آب (H₂O) در مقایسه با هیدروژن سولفید (H₂S)، در فشار ۱ atm آمده است:

ماده	آب	هیدروژن سولفید
فرمول شیمیایی	H ₂ O	H ₂ S
مدل فضاپرکن		
قطبیت مولکول	قطبی	قطبی
گشتاور دوقطبی (μ)	۱/۸۵D	۰/۹۷D
جرم مولی (g.mol ⁻¹)	۱۸	۳۴
حالت فیزیکی (۲۵ °C)	مایع	گاز
نقطه جوش (°C)	۱۰۰	-۶۰

دلیل تفاوت نقطه جوش مواد مولکولی برمی‌گردد به قدرت نیروهای بین مولکولی آن‌ها! از آنجایی که نیروی بین مولکولی آب (H₂O) برخلاف هیدروژن سولفید (H₂S) از نوع پیوند هیدروژنی است، آب نقطه جوش بالاتری دارد.

$$\Rightarrow \frac{0.125}{(1 \times 32) - (1 \times 28)} = \frac{x}{2 \times 30} = \frac{x'}{2 \times 22/4} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{x}{2 \times 30} = \frac{x'}{2 \times 22/4}$$

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{1 \times 30}{4} = \frac{15}{8} = \frac{16}{8} - \frac{1}{8} = 2 - 0.125 = 1.875 \text{ g NO} \\ x' &= \frac{1 \times 22/4}{4} = \frac{22/4}{16} = 1/4 \text{ L NO}_2 \end{aligned} \right.$$

روش استفاده از کسر تبدیل: برای قسمت اول سؤال با توجه به معادله موازنه‌شده واکنش (I)،

به ازای واکنش ۱ مول یا ۲۸ گرم N_۲ با ۱ مول یا ۳۲ گرم O_۲، ۲ مول گاز NO حاصل می‌شود؛ یعنی اگر تفاوت جرم دو گاز N_۲ و O_۲ در آغاز واکنش برابر با ۳۲ - ۲۸ = ۴ باشد، ۲ مول گاز NO خواهیم داشت؛ بنابراین:

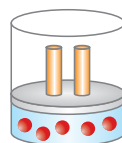
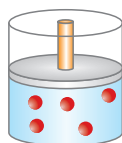
$$0.125 \text{ g} \left(\text{تفاوت جرم} \right) \times \frac{2 \text{ mol NO}}{4 \text{ g} \left(\text{تفاوت جرم} \right)} \times \frac{30 \text{ g NO}}{1 \text{ mol NO}} = 1.875 \text{ g NO}$$

قسمت دوم سؤال هم که یک مسئله استوکیومتری ساده است:

$$1.875 \text{ g NO} \times \frac{1 \text{ mol NO}}{30 \text{ g NO}} \times \frac{2 \text{ mol NO}_2}{1 \text{ mol NO}} \times \frac{22/4 \text{ L NO}_2}{1 \text{ mol NO}_2} = 1/4 \text{ L NO}_2 \text{ در واکنش (II)}$$

۸۱- گزینه ۳

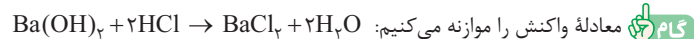
فاصله بین مولکول‌های یک نمونه گازی، به فشار آن بستگی دارد، به طوری که هر چه فشار وارده بر یک گاز بیشتر باشد، فاصله بین مولکول‌های آن کمتر شده و حجم نمونه گازی کاهش می‌یابد.



بررسی سایر گزینه‌ها: ۱ گازها حجم معینی ندارند، ولی مایع‌ها حجم معینی دارند. ۲ با افزایش فشار بر یک نمونه گاز، فاصله بین مولکول‌های آن کم می‌شود و نه حجم مولکول‌ها! شکل مقابل را ببینید:

۴ در دما و فشار ثابت، حجم شمار مول‌های یکسانی از دو گاز با هم برابر است نه حجم جرم‌های یکسانی از دو گاز! جرم مولی CO و CO_۲ با هم متفاوت است؛ بنابراین در یک گرم از آن‌ها، تعداد مول یکسانی وجود ندارد.

۸۲- گزینه ۴



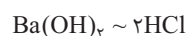
جرم Ba(OH)_۲ در محلول را به دست می‌آوریم:

با توجه به این‌که چگالی محلول برابر با ۱ g.mL⁻¹ است، لذا ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول، جرمی معادل با ۲۰۰ گرم دارد. با توجه به فرمول ppm می‌توان نوشت:

$$\text{ppm}_{\text{Ba(OH)}_2} = \frac{\text{جرم Ba(OH)}_2}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 \Rightarrow 21375 = \frac{x}{200} \times 10^6$$

$$\Rightarrow x = 42750 \times 10^{-4} \text{ g}$$

با استفاده از روابط استوکیومتری از جرم Ba(OH)_۲ به حجم محلول HCl می‌رسیم.



روش استفاده از کسر تناسب:

برای Ba(OH)_۲ کسر تناسب مربوط به جرم و برای HCl کسر تناسب مربوط به غلظت مولی را می‌نویسیم:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{42750 \times 10^{-4}}{1 \times 171} = \frac{0.4 \times x}{1 \times 1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{21375}{171} \times 10^{-3} \text{ (L)} = \frac{21375}{171} \text{ (mL)} > 100 \Rightarrow \text{④}$$

27



همه عبارت‌های داده شده درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

همه شبه‌فلزها در دسته p جدول دوره‌ای قرار دارند.
می‌دانیم که در یک گروه از بالا به پایین، خاصیت فلزی عنصرها افزایش می‌یابد و گروه‌هایی که دارای هر سه نوع عنصر فلزی، نافلزی و شبه‌فلزی هستند، با عنصرهای نافلزی شروع شده و به عنصرهای فلزی ختم می‌شوند؛ پس عدد اتمی یک عنصر فلزی، به یقین بیشتر از عدد اتمی نافلز هم‌گروه آن است.

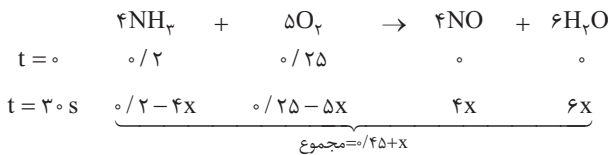
برم (${}_{35}\text{Br}$) تنها نافلز مایع جدول دوره‌ای است. این عنصر در دوره چهارم قرار دارد. تنها عنصر گازی این دوره، گاز نجیب است که واکنش‌پذیری ناچیزی دارد.

در یک دوره از چپ به راست، خصلت فلزی عنصرها کاهش و خصلت نافلزی آن‌ها افزایش می‌یابد.

بنابراین عنصرهای سمت چپ شبه‌فلز X در یک دوره، یا شبه‌فلز و یا فلز هستند و با توجه به این که خواص فیزیکی شبه‌فلزها بیشتر به فلزها شبیه است، به طور کلی می‌توان گفت که عنصرهای سمت چپ شبه‌فلز X، خواص فیزیکی فلزات را دارند.

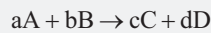
۹۰- گزینه ۲

ابتدا معادله موازنه‌شده واکنش را نوشته و جدول تغییرات مقدار مول مواد را می‌نویسیم:



حالا با توجه به رابطه سرعت یکی از مواد (مثلاً NH_3)، X را حساب می‌کنیم:

نکته: سرعت متوسط واکنش از تقسیم سرعت متوسط تولید یا مصرف یک ماده شرکت‌کننده در واکنش بر ضریب استوکیومتری آن در معادله موازنه‌شده به دست می‌آید.



$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}(A)}{a} = \frac{\bar{R}(B)}{b} = \frac{\bar{R}(C)}{c} = \frac{\bar{R}(D)}{d}$$

$$\bar{R}(\text{واکنش}) = \frac{\bar{R}(\text{NH}_3)}{4} \Rightarrow \bar{R}(\text{NH}_3) = 4 \times 0/02 = 0/08 \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

$$\text{مول NH}_3 \text{ مصرف شده} = 30 \text{ s} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \times \frac{0/08 \text{ mol.L}^{-1}}{1 \text{ min}} \times 2 \text{ L} = 0/08 \text{ mol}$$

$$\Rightarrow 4x = 0/08 \Rightarrow x = 0/02$$

با به دست آمدن پارامتر x، مجموع مول مواد گازی در ظرف که همه مواد شرکت‌کننده در واکنش هستند، را به دست می‌آوریم:

$$0/45 + x = 0/45 + 0/02 = 0/47 \text{ mol}$$

برای قسمت دوم سؤال، با توجه به فرض ثابت بودن سرعت واکنش، کافیست که با توجه به مقدار اولیه و مصرفی یکی از مواد واکنش‌دهنده تا ثانیه ۳۰، مقدار باقی‌مانده آن را به دست بیاوریم و با استفاده از رابطه سرعت، زمان لازم برای مصرف این مقدار باقی‌مانده را حساب کنیم. با گذشت ۳۰ ثانیه، ۰/۰۸ مول آمونیاک مصرف شده و ۰/۱۲ - ۰/۰۸ = ۰/۰۴ مول آن باقی مانده است؛ حالا باید ببینیم که چه قدر زمان نیاز است تا ۰/۱۲ مول آمونیاک دیگر هم مصرف شود:

$$? \text{ s} = 0/12 \text{ mol} \times \frac{1 \text{ min}}{0/08 \text{ mol.L}^{-1} \times 2 \text{ L}} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 45 \text{ s}$$

$$\bar{R}(\text{NH}_3) = \frac{|\Delta n(\text{NH}_3)|}{\Delta t} \Rightarrow 0/08 \times 2 \text{ mol.min}^{-1}$$

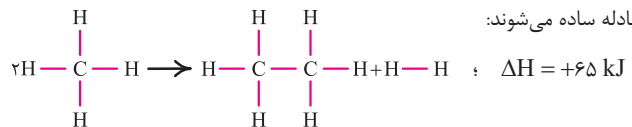
$$= 0/12 \Rightarrow \Delta t = 0/75 \text{ min} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 45 \text{ s}$$

همه آلکن‌ها به دلیل داشتن پیوند دوگانه کربن - کربن سیر نشده‌اند؛ بنابراین همه آن‌ها با برم مایع واکنش می‌دهند. به شمار اتم‌های کربن بستگی ندارد که! نفت کوره دارای مولکول‌های بزرگ‌تری نسبت به نفت سفید است و نقطه جوش بالاتری دارد؛ بنابراین اگر در یک دمای مشخص، نفت کوره به صورت بخار باشد، یعنی دما بالاتر از نقطه جوش نفت کوره باشد، قطعاً آن دما، بالاتر از نقطه جوش نفت سفید نیز خواهد بود و نفت سفید هم به صورت بخار است.

نفت کوره < گازوئیل < نفت سفید < بنزین و خوراک پتروشیمی، مقایسه اندازه و جرم مولکول در برج تقطیر، از پایین به بالا، دما کاهش می‌یابد. از طرفی در ارتفاعات بالاتر برج، مولکول‌های سبک‌تر (مانند بنزین و خوراک پتروشیمی) خارج می‌شوند؛ پس روند تغییر دما و اندازه مولکول‌های خروجی، مانند یکدیگر است.

۸۸- گزینه ۲

در سمت چپ معادله، ۸ پیوند C-H داریم که ۶ تای آن‌ها، با پیوندهای C-H سمت راست معادله ساده می‌شوند:



نکته

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}]$$

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [2\Delta H(\text{C}-\text{H})] - [\Delta H(\text{C}-\text{C}) + \Delta H(\text{H}-\text{H})]$$

$$\Rightarrow 65 = 2\Delta H(\text{C}-\text{H}) - 348 - 435 \Rightarrow 2\Delta H(\text{C}-\text{H}) = 848$$

$$\Rightarrow \Delta H(\text{C}-\text{H}) = 424 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

تیزبازی با توجه به گزینه‌ها، در این سؤال می‌شه بدون حساب کتاب و سریع‌تر به جواب رسید. می‌دانیم که به طور کلی، هر چه شعاع اتم‌های تشکیل‌دهنده پیوند کووالانسی، کوچک‌تر باشند، انرژی لازم برای شکستن آن و در نتیجه آنتالپی پیوند بیشتر است؛ بنابراین:



پس میانگین آنتالپی پیوند H-C که سؤال از ما خواسته، عددی بزرگ‌تر از ۳۴۸ (رد ۳) و کوچک‌تر از ۴۳۵ (رد ۱) است که می‌شه ۲ و تمام!

۸۹- گزینه ۴

درس نامه شبه‌فلزها:

همه شبه‌فلزها به دسته p جدول دوره‌ای تعلق دارند. این عنصرها در جدول دوره‌ای همانند مرزی بین فلزها و نافلزها قرار دارند.

عنصرهایی که در سمت راست این شبه‌فلزها قرار گرفته‌اند، نافلز و عنصرهایی که در سمت چپ این شبه‌فلزها قرار گرفته‌اند، فلز هستند (البته به جز هیدروژن که یک نافلز است).
براند و آله باشد! که در هر دوره (به جز دوره اول که شامل H و He است و دوره هفتم که چند عنصر با ویژگی‌های نامشخص دارد).

همانند فلزها → خواص فیزیکی شبه‌فلزها ← رفتار شیمیایی همانند نافلزها

روند تغییر خصلت فلزی و نافلزی در عناصر جدول دوره‌ای

خصلت فلزی و واکنش‌پذیری فلزها کاهش می‌یابد.

خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری نافلزها افزایش می‌یابد.

خصلت فلزی و واکنش‌پذیری فلزها افزایش می‌یابد.

خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری نافلزها کاهش می‌یابد.

در یک دوره از چپ به راست

در یک گروه از بالا به پایین



- ♦ سوزاندن الیاف آهن در محفظه اکسیژن: تأثیر غلظت بر سرعت واکنش: الیاف آهن گداخته در هوا نمی‌سوزند ولی در محفظه اکسیژن خالص می‌سوزند.
- ♦ سوزاندن گرد آهن از طریق پاشیدن آن بر روی شعله: تأثیر سطح تماس بر سرعت واکنش: گرد آهن پاشیده‌شده بر شعله به خاطر سطح تماس بالا با حرارت شعله می‌سوزد.

۹۴- گزینه ۲

عبارت‌های (الف) و (ت) درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها: (الف) ترکیب داده‌شده دارای ۱۶ اتم کربن و ۱۶ پیوند C—H است. هاستون باشد که ترکیب مورد نظر در مجموع ۱۷ اتم هیدروژن دارد که یکی از آن‌ها به نیتروژن و ۱۶ اتای دیگر به کربن متصل‌اند.

تله در ساختار ترکیب داده‌شده، اتم گوگردی وجود دارد که ۴ پیوند اشتراکی تشکیل داده است؛ بنابراین اگر می‌خواهید از فرمول برای تعیین شمار اتم‌های هیدروژن استفاده کنید، باید حواستون باشد که برخلاف اتم اکسیژن، اتم گوگرد در این‌جا (به خاطر ۴ پیوند اشتراکی) بر روی شمار اتم‌های هیدروژن تأثیر دارد و در فرمول کلی، به خاطر گوگرد، ۲ اتم هیدروژن را نیز باید اضافه کنید؛ یعنی:

(تعداد حلقه‌ها + تعداد پیوندهای دوگانه) - ۲ = (۲n + ۲) = شمار اتم‌های هیدروژن

۲ + (تعداد اتم‌های نیتروژن) + (تعداد پیوندهای سه‌گانه) - ۴ = به خاطر گوگرد

$$= (2 \times 16) + 2 - 2(8 + 3) + 3 + 2 = 17$$

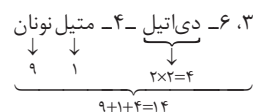
اگر این ۲ اتم هیدروژن را محاسبه نکنید، شمار اتم‌های هیدروژن ۱۵ تا می‌شه و عبارت (الف) رو به اشتباه غلط در نظر می‌گیرید. پس بهتره، در مواردی که ساختار ترکیب آلی دارای گروه‌های



جدید (مثل —S—) است، شمار اتم‌های H رو از روی شکل به دست بیارید نه فرمول.

(ب) یکی از حلقه‌ها، ۵ کربنی خواهد شد، در حالی که حلقه بنزنی (C₆H₆)، ۶ اتم کربن دارد.

(پ) مولکول داده‌شده، ۱۶ اتم کربن دارد، در حالی که آلکان مورد نظر، ۱۴ کربنی است.



(ت)

نکته اکسندترین و کاهنده‌ترین عنصرهای جدول دوره‌ای:

گونه اکسند ← تمایل به گرفتن الکترون ← دارای E⁺ بزرگتر ← اگر عنصر نافلزی باشد، نافلز واکنش پذیرتر

F > O > N > Cl > Br > I > S > C > H: مقایسه واکنش پذیری نافلزها (خصلت نافلزی)

گونه کاهنده ← تمایل به از دست دادن الکترون ← دارای E⁻ کوچکتر ← در میان عناصر، Li کاهنده‌ترین عنصر است.

در ساختار مولکول داده‌شده، ۸ پیوند دوگانه وجود دارد. از طرفی از بین اتم‌های این مولکول (C, H, N, S, O)، اکسیژن بیشترین قدرت اکسندگی را دارد. دو اتم اکسیژن در مجموع دارای ۴ جفت الکترون ناپیوندی هستند:

$$\frac{8}{4} = 2$$

۹۵- گزینه ۴

مقدار pH با غلظت H⁺ رابطه وارونه دارد؛ به طوری که هر چه غلظت یون هیدرونیوم (H₃O⁺ = H⁺) در محلولی بیشتر باشد، آن محلول اسیدی‌تر است و pH کم‌تری دارد.

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] \Rightarrow [\text{H}^+] \uparrow \Rightarrow \text{pH} \downarrow$$

دقت کنید که در محلول‌های اسیدی، تک‌پروتون‌دار (HX)، [H⁺] با [X⁻] برابر است؛ بنابراین:

HA > HX: مقایسه [H⁺] در محلول‌های اسیدی

$$\Rightarrow \text{pH}(\text{HA}) < \text{pH}(\text{HX}) \text{ : مقایسه pH محلول‌های اسیدی}$$

بررسی سایر گزینه‌ها: ۱) هیدروفلوئوریک اسید، یک اسید ضعیف است و [H⁺] در آن کم‌تر از [HF] است. ۲) گاز هیدروژن کلرید (HCl) یک ماده مولکولی است و به کار بردن واژه «تفکیک یونی» برای آن نادرست است.

۹۱- گزینه ۱

درس‌نامه در رابطه با سرعت واکنش نکات زیر را به خاطر بسپاریم:

۱) سرعت متوسط تولید یا مصرف یک ماده، با ضریب استوکیومتری آن ماده در معادله موازنه‌شده واکنش، متناسب است. برای مثال در واکنش A + ۲B → C، سرعت متوسط مصرف B در یک بازه زمانی خاص، ۲ برابر سرعت متوسط مصرف A است.

۲) شیب نمودار «مول یا غلظت - زمان»، بیانگر سرعت متوسط تولید یا مصرف یک ماده بوده و متناسب با ضریب استوکیومتری آن ماده است.

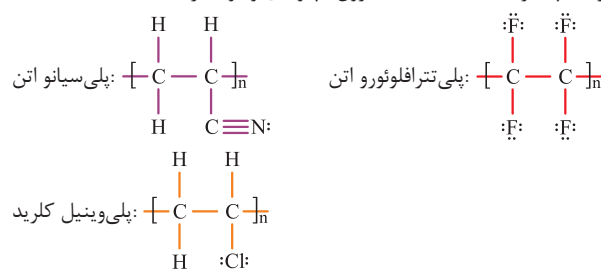
۳) سرعت متوسط واکنش از تقسیم سرعت متوسط تولید یا مصرف یک ماده بر ضریب استوکیومتری آن در معادله موازنه‌شده واکنش، به دست می‌آید. برای مثال در واکنش ۲A + C → ۳B داریم:

$$\bar{R} = \frac{\bar{R}_A}{2} = \frac{\bar{R}_C}{1} = \frac{\bar{R}_B}{3} \text{ واکنش}$$

با توجه به درس‌نامه بالا، همه عبارت‌های داده‌شده، درست و از مفاهیم اولیه سرعت واکنش هستند که باید بلدشون باشید!

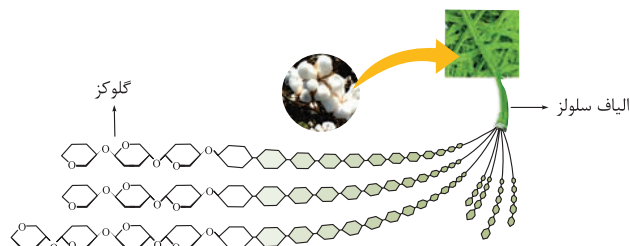
۹۲- گزینه ۳

در ساختار هر سه پلیمر گفته‌شده، جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد:

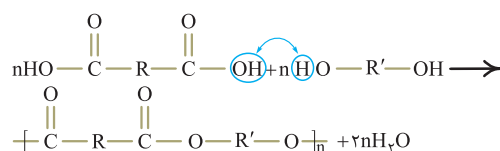


بررسی سایر گزینه‌ها: ۱) به طور کلی، تعداد مونومرهایی که در ساختار هر مولکول پلیمر به هم متصل شده‌اند، مشخص نیست؛ به همین دلیل، برای پلیمرها نمی‌توان فرمول مولکولی دقیقی نوشت.

اگر به شکل الیاف پنبه هم دقت کنید، می‌بینید که طول زنجیرهای آن با هم برابر نیست!



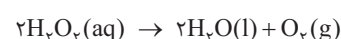
۲) روغن زیتون برخلاف پلی اتن و انسولین، پلیمر نیست و جرم مولی آن از هر دو ماده کم‌تر است. ۳) در تشکیل پلیمرها، لزوماً اتم‌های کربن مونومرها به هم متصل نمی‌شود؛ مثلاً در تشکیل پلی استرها از دی‌اسیدها و دی‌الکل‌ها، اتم کربن به اتم اکسیژن متصل شده و گروه عاملی استری را می‌سازد؛ به عبارت دیگر اتم اکسیژن باعث اتصال مونومرها به یکدیگر می‌شود.

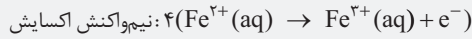


مشاوره ۱، ۲ و ۴ این سؤال، عبارت‌های روتینی نیستند ولی اگر به مفاهیم اصلی کتاب درسی تسلط کافی داشته باشی، با خواندن ۳، می‌تونی به یقین درستی اون رو تأیید کنی.

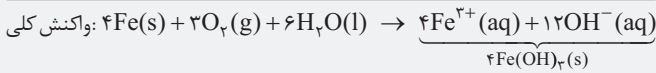
۹۳- گزینه ۴

افزودن I⁻ (aq) به محلول هیدروژن پراکسید برای تجزیه آن: تأثیر استفاده از کاتالیزگر





آهن (II) به آهن (III)

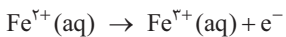
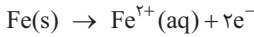


به جز عبارت دوم، بقیه عبارت‌ها درست‌اند.

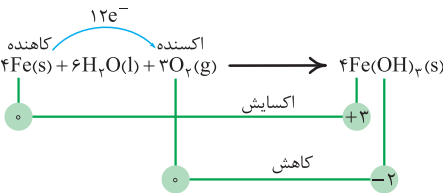
بررسی عبارت‌ها:

واکنش‌های طبیعی و خودبه‌خودی دارای $E^{\circ} > 0$ هستند.

فراورده نیم‌واکنش‌های اکسایش، کاتیون است نه آنیون!



♦

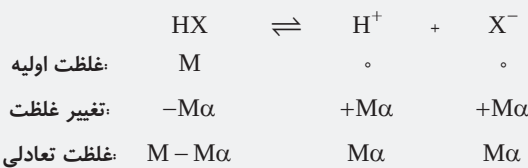


♦ در واکنش زنگ‌زدن آهن، در نهایت Fe به Fe^{3+} تبدیل می‌شود؛ بنابراین می‌توان گفت به ازای مصرف هر مول آهن، ۳ مول الکترون مبادله می‌شود.

۹۹- گزینه ۱

درس‌نامه رابطه ثابت یونش و درجه یونش:

اگر درجه یونش اسید ضعیف HX برابر α و غلظت اولیه اسید برابر M باشد، اسید به اندازه $M\alpha$ یونیده شده و غلظت تعادلی آن برابر با $M - M\alpha$ خواهد بود؛ پس می‌توان نوشت:



$$K_a = \frac{[\text{H}^{+}][\text{X}^{-}]}{[\text{HX}]} = \frac{(M\alpha)(M\alpha)}{M - M\alpha} = \frac{M^2\alpha^2}{M(1 - \alpha)} = \frac{M\alpha^2}{1 - \alpha}$$

$$\Rightarrow K_a = \frac{M\alpha^2}{1 - \alpha}, \quad K_a = \frac{[\text{H}^{+}]^2}{M - [\text{H}^{+}]}$$

برای اسیدهای خیلی ضعیف (معمولاً با K_a کوچک‌تر از 10^{-5}) و یا مقادیر کم α (معمولاً کمتر از ۰/۰۵)، می‌توان در عبارت « $1 - \alpha$ » از α صرف نظر کرده و از رابطه تقریبی زیر استفاده کرد:

$$K_a = M\alpha^2$$

♦ **بررسی گزینه‌ها:** ۱ با ۴ برابر شدن حجم محلول، غلظت مولی آن $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود. با

توجه به این که K_a اسید کوچک است، می‌توانیم از رابطه تقریبی $K_a = M\alpha^2$ استفاده کنیم:

$$K_a = \text{ثابت} \Rightarrow M_1\alpha_1^2 = M_2\alpha_2^2 \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2 \Rightarrow \alpha_2 = 2\alpha_1$$

گزینه درست همین‌ها لو رفت!

♦ با دو برابر کردن جرم و در نتیجه دو برابر شدن تعداد مول اسید و همچنین نصف کردن حجم محلول، غلظت محلول ۴ برابر می‌شود؛ چون غلظت تغییر کرده، pH محلول نیز تغییر خواهد کرد.

$$4 \text{ برابر} \Rightarrow \frac{2 \text{ برابر} \uparrow \text{ مول حل‌شونده}}{\frac{1}{4} \text{ برابر} \downarrow \text{ حجم محلول}} = \text{غلظت محلول}$$

ابتدا باید غلظت مولی محلول را حساب کنیم:

$$\frac{8 \text{ g}}{50 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0.16 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\text{غلظت مولی} = \frac{0.16 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}{1000 \text{ L}} = 0.00016 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

تله اگر در این گزینه به جای واژه «تفکیک یونی» از «فرایند یونیده‌شدن» استفاده می‌شد، این عبارت کاملاً درست بود؛ بنابراین اگر دقت کافی نداشته باشی و همه گزینه‌ها رو بررسی نکنی، این گزینه می‌تونه فیللی راحت و شیک، تو رو تو درام بندازه!

♦ با افزایش شمار اتم‌های کربن در کربوکسیلیک اسیدها، ثابت یونش و قدرت اسیدی آن‌ها کاهش می‌یابد؛ بنابراین در شرایط یکسان، خاصیت اسیدی محلول فرمیک اسید (HCOOH) بیشتر از محلول استیک اسید (CH_3COOH) است.

۹۶- گزینه ۴

عبارت‌های (الف) و (پ) درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

(الف)

$$\begin{cases} [\text{OH}^{-}] = M\alpha = 0.1 \times 0.16 = 1/6 \times 10^{-2} \\ [\text{H}^{+}] = \frac{10^{-14}}{[\text{OH}^{-}]} = \frac{10^{-14}}{1/6 \times 10^{-2}} = 6/25 \times 10^{-13} \end{cases}$$

(ب) با افزایش شمار اتم‌های کربن، بخش ناقطبی بزرگ‌تر شده و از میزان انحلال‌پذیری آن در آب کاسته می‌شود. در نتیجه پاک‌کنندگی آن نیز کاهش می‌یابد.

(پ) انحلال Li_2O و N_2O_5 در آب به صورت زیر است:



با انحلال مول‌های برابر از این مواد در حجم برابر آب، $[\text{H}^{+}] = [\text{OH}^{-}]$ خواهد بود و محلولی با pH خنثی حاصل می‌شود.

(ت) قسمت اول درست است و با افزایش غلظت مولی هر اسیدی (قوی یا ضعیف)، $[\text{H}^{+}]$ بالا رفته و pH کاهش می‌یابد اما بر روی ثابت تعادل (ثابت یونش) فقط و فقط دما تأثیرگذار است و پس!

۹۷- گزینه ۲

استراتژی اول رابطه ثابت یونش رو برای هر دو اسید بنویس (می‌دونی که برای

محاسبه ثابت تعادل، غلظت تعادلی مواد در رابطه ثابت تعادل قرار می‌گیره)، از اون‌جا که

$$\text{سؤال} \quad \frac{K_a(\text{HD})}{K_a(\text{HA})} \text{ رو بهت داده، رابطه ثابت یونش HD رو بر HA تقسیم و کسر حاصل رو}$$

ساده کن. در نهایت از دو طرف معادله $-\log$ بگیر تا $[\text{H}^{+}]$ در رابطه به pH تبدیل شه و خواسته مسئله رو بتونی به دست بیاری.

از رابطه محاسبه ثابت یونش استفاده می‌کنیم:

$$K_a = \frac{[\text{H}^{+}]^2}{[\text{HX}]_{\text{تعادلی}}} \xrightarrow{\text{یکسان} = \text{تعادلی}} \frac{K_a(\text{HD})}{K_a(\text{HA})} = \left(\frac{[\text{H}^{+}]_{\text{HD}}}{[\text{H}^{+}]_{\text{HA}}} \right)^2$$

$$\Rightarrow 10^{-6} = \left(\frac{[\text{H}^{+}]_{\text{HD}}}{[\text{H}^{+}]_{\text{HA}}} \right)^2 \Rightarrow \frac{[\text{H}^{+}]_{\text{HD}}}{[\text{H}^{+}]_{\text{HA}}} = 10^{-3} \Rightarrow [\text{H}^{+}]_{\text{HD}} = 10^{-3} [\text{H}^{+}]_{\text{HA}}$$

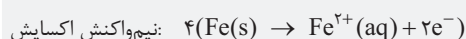
$$\xrightarrow{-\log \text{ می‌گیریم}} \underbrace{-\log[\text{H}^{+}]_{\text{HD}}}_{\text{pH}(\text{HD})} = \underbrace{-\log 10^{-3}}_3 - \underbrace{\log[\text{H}^{+}]_{\text{HA}}}_{\text{pH}(\text{HA})}$$

$$\Rightarrow \text{pH}(\text{HA}) = \text{pH}(\text{HD}) - 3$$

۹۸- گزینه ۳

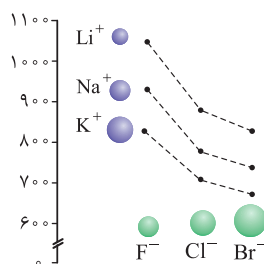
درس‌نامه هنگامی که یک قطعه آهن در هوای مرطوب قرار می‌گیرد، همانند

سلول‌های گالوانی یک واکنش اکسایش - کاهش خودبه‌خودی ($E^{\circ} > 0$ سلول) در حضور O_2 در سطح آن رخ می‌دهد. نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش و واکنش کلی فرایند زنگ‌زدن آهن به صورت زیر است:



نیم‌واکنش اکسایش

نیم‌واکنش کاهش



۲) آنیون‌های سازنده یک دوره، بارهای متفاوتی دارند. اگر عناصر سازنده آنیون‌های a و b، در یک دوره بود، به دلیل اختلاف بار آن‌ها، تفاوت آنتالپی فروپاشی آن‌ها خیلی بیشتر از اینی می‌شد که در نمودار نشان داده شده! ۳) نه اصلاً! مثلاً e و c به ترتیب می‌توانند MgO و CaO باشند که بار یون‌های هر دو، ۲- و ۲+ است اما به دلیل کم‌تر بودن شعاع Mg^{2+} ، آنتالپی فروپاشی ترکیب e بیشتر از c شده است. ۴) آنتالپی فروپاشی ترکیب‌های d و b بسیار به هم نزدیک است؛ بنابراین اختلاف بار یون‌های سازنده آن‌ها را بی‌فایده می‌شیم و فقط می‌ریزم سراغ مقایسه شعاع یون‌ها! می‌دانیم که آنتالپی فروپاشی شبکه با شعاع یون‌ها رابطه وارونه دارد. با توجه به این‌که آنتالپی فروپاشی d از b بیشتر و شعاع آنیون آن بیشتر است، پس حتماً باید شعاع کاتیون آن کم‌تر باشد.

مشاوره این سؤال، چالشی‌ترین سؤال این کنکور بوده، سر جلسه آزمون این‌جور سؤال‌ها رو باید حتماً در دور اول رها کنید و در آخر اگر زمان داشتید بیایید سراغش.

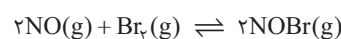
گزینه ۲ - ۱۰۲

گام ۱ ابتدا شمار مول‌های تعادلی مواد (n) و سپس غلظت‌های تعادلی ([]) آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\text{مول}}{\text{جرم}} = \text{غلظت مولی}, \quad \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}} = \text{مول}$$

$$\left\{ \begin{aligned} n_{\text{NOBr}} &= \frac{66}{110} = 0.6 \text{ mol} \\ n_{\text{NO}} &= \frac{18}{30} = 0.6 \text{ mol} \\ n_{\text{Br}_2} &= \frac{24}{160} = 0.15 \text{ mol} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} [\text{NOBr}] &= \frac{0.6}{3} = 0.2 \text{ M} \\ [\text{NO}] &= \frac{0.6}{3} = 0.2 \text{ M} \\ [\text{Br}_2] &= \frac{0.15}{3} = 0.05 \text{ M} \end{aligned} \right.$$

گام ۲ حالا از رابطه ثابت تعادل استفاده می‌کنیم:



$$K = \frac{[\text{NOBr}]^2}{[\text{NO}]^2 [\text{Br}_2]} = \frac{(0.2)^2}{(0.2)^2 \times 0.05} = 2$$

گام ۳ برای قسمت دوم سؤال، با توجه به اطلاعات داده‌شده میزان مصرفی Br_2 ۶۰٪ بوده؛ پس ۴۰٪ از آن باقی مانده است یعنی مقدار Br_2 در حال تعادل، ۴۰٪ مقدار اولیه‌اش است.

$$\frac{40}{100} \times n_{\text{Br}_2} = 0.15 \text{ mol} \Rightarrow n_{\text{Br}_2} = 0.375 \text{ mol}$$

تله اگر به اشتباه، ۶۰٪ مقدار آغازی Br_2 را برابر با مقدار تعادلی آن (۰/۱۵ mol)، در نظر بگیرید به عدد ۲۵٪ و گزینه اشتباه ۱ می‌رسید.

گزینه ۳ - ۱۰۳

انرژی فعال‌سازی سوختن گاز هیدروژن در هوا و در دمای اتاق تأمین نمی‌شود اما این انرژی برای فسفر سفید تأمین شده و فسفر سفید برخلاف گاز هیدروژن، در هوا و در دمای اتاق می‌سوزد. سوختن گاز هیدروژن < سوختن فسفر سفید: E_a در هوا و در دمای اتاق

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) محدوده طول موج $10^5 - 10^3 \text{ nm}$ ، مربوط به محدوده پرتوهای فروسرخ است. گروه‌های عاملی می‌توانند بخش معینی از پرتوهای الکترومغناطیسی در این محدوده را جذب کنند؛ به همین دلیل برای شناسایی گروه‌های عاملی از طیف‌سنجی فروسرخ استفاده می‌شود.

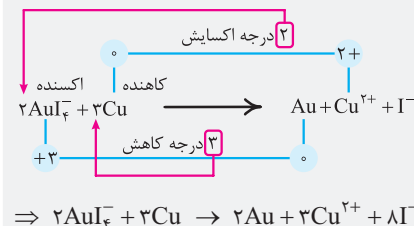
$$K_a = \frac{[\text{H}^+]^2}{M} \Rightarrow [\text{H}^+]^2 = 10^{-5} \times 4 \times 10^{-1} = 4 \times 10^{-6} \Rightarrow [\text{H}^+] = 2 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{[\text{H}^+]} = \frac{10^{-14}}{2 \times 10^{-3}} = 5 \times 10^{-12} \text{ mol.L}^{-1}$$

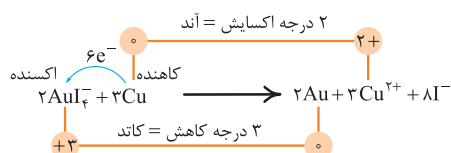
$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] = -\log(2 \times 10^{-3}) = 3 - \log 2 = 3 - 0.3 = 2.7$$

گزینه ۱ - ۱۰۰

درس‌نامه موازنه به روش تغییر عدد اکسایش؛ به طور کلی برای موازنه واکنش‌های اکسایش-کاهش، ابتدا تغییر عدد اکسایش اتم‌ها را حساب می‌کنیم؛ سپس مقدار تغییر عدد اکسایش گونه کاهنده را ضریب گونه اکسایش گونه اکسندۀ را ضریب کاهنده قرار می‌دهیم و در آخر، با توجه به ضرایبی که معلوم هستند، ضرایب بقیه گونه‌ها را تعیین می‌کنیم. موازنه باشد که اگر عنصری که عدد اکسایش آن تغییر کرده است، دارای زیروند باشد، باید تغییر عدد اکسایش آن را در زیروندش ضرب کنیم و سپس جابه‌جایی تغییر عدد اکسایش‌ها را انجام بدهیم. مثال:



همه عبارت‌های داده‌شده درست‌اند. معادله موازنه‌شده واکنش به صورت زیر است:



بررسی عبارت‌ها:

$$E^\circ(\text{واکنش}) = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{اند}) = 0.56 - 0.34 = 0.22$$

خودبه‌خودی و انجام‌پذیر $\Rightarrow E^\circ(\text{واکنش}) > 0$

عبارت دوم:

نکته

تغییر عدد اکسایش یک اتم $\times$ زیروند اتم اکسندۀ یا کاهندۀ $\times$ ضریب = تعداد مول الکترون مبادله‌شده

تعداد مول الکترون‌های مبادله‌شده برابر است با:

$$3 \times 1 \times 2 = 6e^- \Rightarrow \text{براساس گونه کاهنده}$$

$$2 \times 1 \times 3 = 6e^- \Rightarrow \text{براساس گونه اکسندۀ}$$

عبارت سوم: یون AuI_3^- با گرفتن الکترون از Cu، به عنوان اکسندۀ عمل می‌کند.

$$\text{مجموع ضرایب} = 2 + 3 + 2 + 3 + 6 = 18$$

عبارت چهارم:

گزینه ۴ - ۱۰۱

درس‌نامه تکنیک مقایسه آنتالپی فروپاشی شبکه بلور ترکیب‌های یونی:

به طور کلی برای مقایسه ΔH فروپاشی شبکه ترکیب‌های یونی می‌توان از روش زیر استفاده کرد:

گام ۱ هر چه مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون در یک ترکیب یونی بزرگ‌تر باشد، ΔH فروپاشی شبکه آن بزرگ‌تر است.

گام ۲ اگر مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون برای دو ترکیب یونی برابر باشد، هر چه شعاع یون‌های ترکیب یونی کوچک‌تر باشد، ΔH فروپاشی آن بزرگ‌تر است.

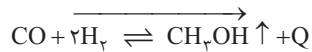
با توجه به نمودار، مقایسه آنتالپی فروپاشی ۵ ترکیب داده‌شده به صورت $b > d > a > c > e$ است.

بررسی گزینه‌ها: ۱) آنتالپی فروپاشی ترکیب‌های a، b و d، کم‌تر از 1000 kJ.mol^{-1} است.

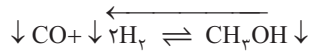
با توجه به نمودار کتاب درسی، آنتالپی فروپاشی اغلب هالیدهای فلزهای قلیایی نیز کم‌تر از 1000 kJ.mol^{-1} است؛ پس آنیون ترکیب a می‌تواند یک هالید باشد.



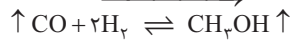
♦ کاهش دما: چون واکنش گرماده است، کاهش دما تعادل را در جهت رفت جابه‌جا می‌کند.



♦ خارج کردن ۵۰ درصد از H_2 و CO به صورت هم‌زمان: با کاهش مقدار H_2 و CO ، تعادل در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود.



♦ تزریق CO به طرف واکنش: با افزایش مقدار CO ، تعادل در جهت رفت و مصرف آن پیش می‌رود.



۱۰۵- گزینه ۱

درس‌نامه روند تغییر شعاع یونی در جدول دوره‌ای:

۱ در یک گروه جدول دوره‌ای، درست مانند شعاع اتمی، شعاع یونی هم از بالا به پایین افزایش می‌یابد.

مثال: ${}^3\text{Li}^+ < {}^{11}\text{Na}^+ < {}^{19}\text{K}^+ < {}^{37}\text{Rb}^+ < {}^{55}\text{Cs}^+$ شعاع یونی فلزهای قلیایی

${}^9\text{F}^- < {}^{17}\text{Cl}^- < {}^{35}\text{Br}^- < {}^{53}\text{I}^-$ شعاع یونی هالیدها

۲ در یون‌های هم‌الکترون، هر چه عدد اتمی بیشتر باشد، شعاع یون کوچک‌تر است.

مثال: شعاع ${}^{13}\text{Al}^{3+} > {}^{12}\text{Mg}^{2+} > {}^{11}\text{Na}^+ > {}^9\text{F}^- > {}^8\text{O}^{2-} > {}^7\text{N}^{3-}$ همگی ۱۰ الکترون دارند.

شعاع ${}^{15}\text{P}^{3-} > {}^{16}\text{S}^{2-} > {}^{17}\text{Cl}^- > {}^{19}\text{K}^+ > {}^{20}\text{Ca}^{2+} > {}^{21}\text{Sc}^{3+}$ همگی ۱۸ الکترون دارند.

همان‌طور که دیدید در یون‌های هم‌الکترون، شعاع آنیون‌ها از شعاع کاتیون‌ها بزرگ‌تر است.

۳ در دوره‌های دوم و سوم، کاتیون‌ها نسبت به آنیون‌ها یک لایه الکترونی کم‌تر دارند، به همین دلیل، شعاع کاتیون‌ها از شعاع آنیون‌ها کوچک‌تر است.

مثال: شعاع ${}^{15}\text{P}^{3-} < {}^{16}\text{S}^{2-} < {}^{17}\text{Cl}^- < {}^{11}\text{Na}^+ < {}^{12}\text{Mg}^{2+} < {}^{13}\text{Al}^{3+}$ دوره سوم ۱۸ الکترون دارند ۱۰ الکترون دارند

یون‌های داده‌شده در ۱، هم‌الکترون هستند. در یون‌های هم‌الکترون، هر چه عدد اتمی بیشتر باشد، شعاع یون کوچک‌تر است:

شعاع ${}^{16}\text{S}^{2-} > {}^{17}\text{Cl}^- > {}^{19}\text{K}^+ > {}^{20}\text{Ca}^{2+}$ همگی ۱۸ الکترون دارند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(برای رد هر گزینه، دنبال ۱ مورد غلط می‌گردیم.)

۲ دقت کنید که شعاع ${}^{19}\text{K}^+$ با داشتن یک لایه الکترونی بیشتر، از شعاع ${}^{12}\text{Mg}^{2+}$ بیشتر است.

هم‌الکترون
شعاع ${}^{35}\text{Br}^- > {}^{17}\text{Cl}^- > {}^{19}\text{K}^+ > {}^{12}\text{Mg}^{2+}$
یون‌های هم‌گروه ۳ لایه الکترونی ۲ لایه الکترونی

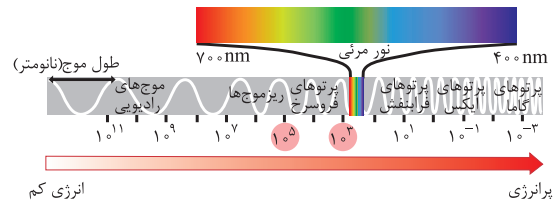
۳ یون‌های داده‌شده در این گزینه، همگی در دوره سوم قرار دارند (هم‌دوره‌اند). در دوره سوم، شعاع کاتیون‌ها از شعاع آنیون‌ها کوچک‌تر است:

شعاع ${}^{16}\text{S}^{2-} > {}^{17}\text{Cl}^- > {}^{12}\text{Mg}^{2+} > {}^{13}\text{Al}^{3+}$

۴ در یون‌های هم‌الکترون، با افزایش عدد اتمی، شعاع یونی کوچک‌تر می‌شود:

شعاع ${}^8\text{O}^{2-} > {}^9\text{F}^- > {}^{12}\text{Mg}^{2+}$ همگی ۱۰ الکترون دارند.

مشاوره برای این مدل سؤال‌های مقایسه‌ای، بهتره با رد گزینه به پاسخ صحیح برسید؛ یعنی در هر گزینه، یک مورد غلط رو پیدا کنید و گزینه رو حذف کنید.



۲ انرژی فعال‌سازی واکنش‌های گفته‌شده، بالا بوده و در دمای اتاق انجام نمی‌شود.

$\text{N}_2 + \text{H}_2 \xrightarrow{\text{در دمای اتاق}}$ انجام نمی‌شود.

$\text{N}_2 + \text{O}_2 \xrightarrow{\text{در دمای اتاق}}$ انجام نمی‌شود.

۲ اصلاً تعریف طیف همینه!



۱۰۴- گزینه ۲

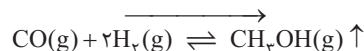
نکته اثر عوامل مختلف بر تعادل:

عامل	عکس‌العمل تعادل به تغییر	چگونگی تغییر ثابت تعادل (K) جابه‌جاشدن تعادل
تغییر غلظت	افزایش غلظت یک ماده	جابه‌جایی در جهت مصرف آن ماده
	کاهش غلظت یک ماده	جابه‌جایی در جهت تولید آن ماده
تغییر حجم (فشار)	افزایش حجم (کاهش فشار) سامانه	جابه‌جایی در جهت شمار مول‌های گازی بیشتر
	کاهش حجم (افزایش فشار) سامانه	جابه‌جایی در جهت شمار مول‌های گازی کم‌تر
تغییر دما	واکنش‌های گرماده	کاهش دما
	افزایش دما	جابه‌جایی در جهت تولید گرما (جهت رفت)
	واکنش‌های گرماگیر	کاهش دما
	افزایش دما	جابه‌جایی در جهت مصرف گرما (جهت رفت)

هر عاملی که سبب جابه‌جایی تعادل در جهت رفت شود، مقدار فراورده را افزایش خواهد داد.

بررسی همه موارد:

♦ افزایش فشار: تعادل را به سمت مول‌های گازی کم‌تر جابه‌جا می‌کند:



♦ خارج کردن ۵۰ درصد از CH_3OH : $\text{CO(g)} + 2\text{H}_2\text{(g)} \rightleftharpoons \text{CH}_3\text{OH(g)} \downarrow$

تله دقت کنید که در این سؤال منظور طراح فقط جابه‌جایی تعادل در جهت رفت (افزایش مقدار فراورده) است، نه افزایش مقدار فراورده نسبت به تعادل اولیه!

اگر به اشتباه مقدار فراورده رو پس از اعمال تغییر نسبت به تعادل اولیه بررسی کنید، این مورد رو غلط در نظر می‌گیرید؛ زیرا با خارج کردن ۵۰٪ CH_3OH (فراورده) از تعادل اولیه، مقدار فراورده در تعادل جدید نسبت به تعادل اولیه، کم‌تر می‌شود.